



João Pedro Rúbio do Amaral

Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

Encurvadura em vigas mistas: Estudo do modelo em “U” Invertido

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia
Civil – Perfil Estruturas

Orientador: Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

Júri:

Presidente: Prof. Doutor António Manuel Pinho Ramos
Arguente: Prof. Doutor João Gomes Rocha de Almeida
Vogal: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



**FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

Dezembro de 2011

“Copyright” João Pedro Rúbio do Amaral, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador de tese, Doutor Rodrigo Gonçalves, por todo o apoio prestado, pelos conhecimentos transmitidos, pela disponibilidade total e pelo aconselhamento e incentivo, contribuindo assim de uma forma valiosa para a realização desta dissertação.

Quero também prestar o meu agradecimento a todos os meus colegas e amigos, pela amizade, pelo apoio, pelo incentivo, pela disponibilidade e pelo companheirismo, tanto nos momentos mais difíceis e exigentes, como nos momentos de maior descontração e diversão.

Por fim, mas não com menor importância, quero agradecer do fundo do coração a toda a minha família pelo apoio incondicional no meu percurso académico, sem vós não seria o que sou hoje e não teria conseguido. MUITO OBRIGADO.

Resumo

A presente dissertação contribui para o estudo de fenómenos de instabilidade em vigas mistas aço-betão, nomeadamente o fenómeno de encurvadura lateral que tende a ocorrer, principalmente, em zonas de momentos negativos. Em particular, estuda-se o modelo de “U” invertido, efectuando-se uma contribuição baseada na teoria generalizada de vigas (GBT) para o cálculo de momentos críticos elásticos, a qual permite ter em conta de uma forma precisa, o modo de distorção da secção transversal mista. É desenvolvida uma expressão analítica para o cálculo de momentos críticos, segundo a GBT. Além deste método, são apresentados mais dois métodos, que servem de validação e comparação para o método desenvolvido neste documento. Desenvolve-se ainda um método numérico para vigas mistas sujeitas a momentos actuantes não-uniformes.

Palavras chave:

Vigas mistas aço-betão; Encurvadura lateral; Momento crítico; Modelo em “U” invertido.

Abstract

Buckling in composite beams: Study of the inverted “U-frame” model

The present dissertation contributes to the study of instability phenomena in steel-concrete composite beams, namely the lateral buckling phenomenon that occurs mainly at hogging bending regions. In particular, the inverted “U-frame” model is studied, employing generalised beam theory (GBT) for the calculation of elastic critical moments, which makes it possible to accurately take into account the distortional mode of the composite cross-section. An analytical expression for the critical moment is developed using GBT. Two additional methods are presented to validate and compare the method developed on this document. A numerical method is also developed for composite beams with non-uniform bending moments.

Keywords:

Steel-concrete composite beams; Lateral buckling; Critical moment; Inverted “U-frame” model.

Índice de Matérias

Índice de Matérias	9
Índice de Figuras	11
Índice de Tabelas	13
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Revisão bibliográfica	3
1.3 Motivação e Objectivos	6
1.4 Organização da tese	6
2 Métodos de análise do modelo em “U” invertido	9
2.1 Introdução	9
2.2 Método do Eurocódigo 4	9
2.3 Método de Hanswille	14
2.3.1 Vigas sujeitas a momento uniforme	15
2.3.2 Vigas sujeitas a momento variável	16
2.4 Método da Teoria Generalizada de Vigas	18
2.4.1 Introdução	18
2.4.2 Descrição do método	18
2.4.3 Aplicação ao modelo em “U” invertido	22
2.4.3.1 Análise da secção transversal	22
2.4.3.2 Constantes de rigidez	25
2.4.3.3 Carga de bifurcação — viga simplesmente apoiada	26
2.4.3.4 Carga de bifurcação — viga contínua sujeita a carga distribuída	29
2.5 Comparação dos métodos	30
2.5.1 Método do EC4 vs. GBT	31
2.5.2 Método de Hanswille vs. GBT	32
3 Exemplos ilustrativos	35

3.1	Introdução	35
3.2	Exemplo 1: viga de Gonçalves e Camotim (2010)	35
3.3	Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)	37
3.3.1	Caso 1 — viga mista simplesmente apoiada	38
3.3.1.1	Aplicação do método do EC4	39
3.3.1.2	Aplicação do método de Hanswille	41
3.3.1.3	Aplicação do método da GBT	43
3.3.1.4	Discussão e comparação dos resultados	47
3.3.2	Caso 2 — viga mista contínua	48
3.3.2.1	Aplicação do método do EC4	50
3.3.2.2	Aplicação do método de Hanswille	53
3.3.2.3	Aplicação do método da GBT	54
3.3.2.4	Discussão e comparação dos resultados	62
4	Conclusões e desenvolvimentos futuros	63
4.1	Conclusões	63
4.2	Desenvolvimentos futuros	65
	Bibliografia	67

Índice de Figuras

1.1	Exemplos de secções transversais mistas (Calado e Santos, 2010)	2
1.2	(a) Modo de encurvadura distorcional; (b) Modo de encurvadura local	3
2.1	Encurvadura em vigas mistas.	9
2.2	Simplificações para as condições de apoio da laje e modelos de cálculo da rigidez da laje, k_1	11
2.3	(a) Modelo de cálculo da rigidez da alma, k_2 ; (b) Modelo de cálculo da rigidez de flexão transversal, k_2	12
2.4	Geometria do modelo em “U” invertido	12
2.5	Valores de C_4 para vigas com carregamento de vão (Calado e Santos, 2010) . . .	13
2.6	Valores de C_4 para vigas sem carregamento de vão (Calado e Santos, 2010) . . .	13
2.7	Valores de C_4 para vigas com uma extensão em consola (Calado e Santos, 2010) .	13
2.8	Modelo para determinar o momento crítico elástico de encurvadura distorcional de vigas mistas (Hanswille, 2000)	15
2.9	Modelo de alteração do centro de corte	15
2.10	Factor de comprimento efectivo β_B para membros com diferentes momentos de extremidade e sem carregamento uniformemente distribuído (Hanswille, 2000) . .	16
2.11	Factor de comprimento efectivo β_B para membros com momentos nas extremidades e com carregamento uniformemente distribuído (Hanswille, 2000)	17
2.12	Representação sistema de eixos locais de um membro prismático de paredes finas (Gonçalves e Camotim, 2010)	18
2.13	Exemplos dos modos de deformação finais da secção transversal (Gonçalves <i>et al.</i> , 2010)	20
2.14	Geometria da secção mista da viga	23
2.15	Discretização da secção mista da viga	23
2.16	Modo de deformação do banzo inferior	24
2.17	Modo de deformação da secção transversal no seu plano e grau das funções \bar{w} em cada parede	24
2.18	Representação do diagrama de extensões da secção transversal mista, assumindo a fendilhação do betão	27

2.19	Variação do momento crítico com o vão para uma viga simplesmente apoiada sujeita a momento uniforme	28
2.20	Representação do comportamento do tipo “placa” (Gonçalves, 2011)	28
2.21	(a) Distribuição de tensões longitudinais no banzo de betão devida ao efeito de <i>shear lag</i> ; (b) Distribuição uniforme de tensões longitudinais na largura efectiva, b_{eff}	29
2.22	Funções de aproximação, ψ , para uma viga contínua com vão de 10 m	31
2.23	Variação do momento crítico com o vão de acordo com o método do EC4 (ENV).	32
2.24	Variação do momento crítico com o vão de acordo com o método de Hanswille.	33
3.1	Representação do modo de distorção da secção transversal mista, à escala	37
3.2	Comparação entre os resultados obtidos com a presente formulação e os obtidos por Gonçalves e Camotim (2010)	38
3.3	Geometria da secção da viga mista de Calado e Santos (2010)	38
3.4	Viga mista simplesmente apoiada	39
3.5	Secção fendilhada da laje de betão armado	40
3.6	Gráfico comparativo dos vários métodos para uma viga simplesmente apoiada	49
3.7	Gráfico comparativo dos vários métodos para uma viga simplesmente apoiada considerando uma rigidez menor para a laje	49
3.8	Viga mista contínua	50
3.9	Amplitude dos modos de instabilidade da viga contínua da figura 2.22	61
3.10	Valores de λ_{cr} para diferentes números de funções de aproximação n	61

Índice de Tabelas

2.1	Deslocamentos nodais do modo distorcional	25
3.1	Dados para a geometria da secção mista	36
3.2	Valores da componente w dos deslocamentos nodais do modo de deformação . . .	37
3.3	Rigidez de empenamento	47
3.4	Rigidez de flexão	47
3.5	Rigidez de torção	47
3.6	Valores de λ_{cr} para diferentes números de funções de aproximação n	62

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

EC2 Eurocódigo 2

EC3 Eurocódigo 3

EC4 Eurocódigo 4

Siglas

FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia

UNL Teoria de Vigas Generalizada (Generalised Beam Theory)

UNL Universidade Nova de Lisboa

Letras Latinas Maiúsculas

A área da secção mista equivalente, desprezando o betão traccionado

A_a área da secção transversal de aço estrutural

A_c área da secção transversal de betão

A_s área da secção transversal de armaduras

B constante de rigidez de flexão transversal (GBT)

C_ϕ rigidez de flexão transversal (Hanswille)

C_1 constante de rigidez de flexão longitudinal dos termos de membrana (GBT)

C_2 constante de rigidez de flexão longitudinal dos termos de flexão (GBT)

C_4 coeficiente cujo valor depende da forma do diagrama de momentos flectores a actuar na viga (EC4)

D_1 constante de rigidez de torção (GBT)

D_2 constante de acoplamento por efeito de Poisson (GBT)

E_a módulo de elasticidade do aço estrutural

E_{cm} módulo de elasticidade do betão

- E_s módulo de elasticidade do aço em armaduras
- G módulo de distorção do aço estrutural
- I inércia da secção mista em relação à linha neutra (GBT)
- I_{at} constante de torção de St. Venant da secção de aço estrutural (EC4)
- I_{afz} momento de inércia do banzo inferior da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia (EC4)
- I_{ay} momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de maior inércia
- I_{az} momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia
- $I_{st,y}$ momento de inércia da secção mista em relação ao eixo central da secção paralelo a y , desprezando o betão
- I_T constante de torção de St. Venant (Hanswille)
- I_{WD} constante de empenamento da secção de aço estrutural para uma rotação em torno do banzo superior
- I_{WM} constante de empenamento da secção de aço estrutural em relação ao centro de corte M
- I_y momento de inércia referente ao eixo de maior inércia da secção mista fendilhada
- I_2 momento de inércia da laje fendilhada por unidade de largura
- L comprimento de viga mista entre pontos em que o banzo inferior do elemento de aço está lateralmente travado
- L_e vão equivalente (EC4)
- M momento flector actuante na viga mista
- M_{cr} momento crítico elástico de encurvadura lateral
- M_{ed} momento actuante máximo negativo
- M_{Rd} momento flector resistente no apoio interno
- M_y momento flector segundo y a actuar na secção mista
- M_0 momento se o vão da viga fosse simplesmente apoiado
- $M_{b,Rd}$ momento resistente à encurvadura lateral
- \bar{S} linha média da secção transversal (GBT)
- X constante que tem em conta os efeitos geométricos não-lineares (GBT)

Letras Latinas Minúsculas

- a afastamento dos perfis de aço estrutural (EC4)
- a_{st} distância entre a posição da armadura ordinário e o centro de massa do perfil metálico (Hanswille)
- a_1 distância da linha média da secção de betão à linha média do banzo superior (GBT)
- a_2 distância entre linhas médias dos banzos da secção de aço estrutural (GBT)
- b largura da secção de betão que funciona como banzo da secção mista
- b_0 distância entre os centros dos conectores extremos
- b_{eff} largura efectiva da secção de betão
- b_{ei} valor da largura efectiva do banzo de betão de cada lado da alma
- b_f largura do banzo da secção de aço estrutural
- d distância à linha neutra (GBT)
- \mathbf{d} vector das incógnitas (GBT)
- d_c altura da laje de betão comprimida
- d_s posição da armadura ordinária (EC4)
- h_c altura da secção de betão
- h_s distância entre linhas médias dos banzos da secção de aço estrutural
- h_w altura da alma da secção de aço estrutural
- i_x raio de giração polar (EC4)
- i_p raio de giração polar (Hanswille)
- k modo de deformação
- k_c parâmetro que tem em conta as propriedades da secção de aço estrutural (EC4)
- k_s rigidez de flexão transversal da estrutura de “U” invertido (EC4)
- k_z factor que tem em conta as propriedades da secção de aço estrutural (Hanswille)
- k_1 rigidez de flexão transversal da laje de betão
- k_2 rigidez de flexão transversal da alma do perfil de aço estrutural
- n coeficiente de homogeneização
número de onda do modo de deformação
- t_f espessura do banzo do perfil de aço estrutural
- t_w espessura da alma do perfil de aço estrutural

- u componente do deslocamento da linha média da parede segundo x
- v componente do deslocamento da linha média da parede segundo y
- w componente do deslocamento da linha média da parede segundo z
- z_c distância entre o baricentro da secção de aço estrutural e a meia espessura da laje de betão
- z_D distância da linha média do banzo superior ao centro de corte do perfil (Hanswille)
- z_e posição da linha neutra (EC4)
- z_M coordenada do centro de corte (Hanswille)
- z_{st} posição do baricentro da secção mista, desprezando o betão fendilhado (Hanswille)
- $z_{st,a}$ distância entre baricentros do perfil e da secção mista (Hanswille)
- y_{ln} posição da linha neutra da secção mista

Letras Gregas

- α parâmetro que depende das condições de apoio da viga mista
- β_B factor de comprimento
- γ_{xy} distorção da secção transversal
- δ deslocamento lateral do banzo inferior do perfil de aço estrutural
- ϵ extensões na secção mista
- η_B factor de comprimento
- λ valores próprios
- $\bar{\lambda}_{LT}$ esbelteza normalizada
- ν_a coeficiente de Poisson do aço estrutural
- ν_c coeficiente de Poisson do betão
- ν_s coeficiente de Poisson das armaduras
- σ_{xx} tensão longitudinal normal
- σ_{yy} tensão normal na direcção y
- τ_{xy} tensão de corte
- $\bar{\phi}$ amplitude do modo longitudinal
- χ_{LT} factor de redução do momento flector resistente no apoio interno
- ψ vector linha que contem as funções de aproximação
- ψ funções de aproximação
- relação entre o momento no apoio interno, M_B , e o momento se o vão da viga fosse simplesmente apoiado, M_0

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

No presente documento, considera-se elemento misto aquele que combina aço e betão, geralmente armado, de modo a que estes dois materiais trabalhem em conjunto. Considera-se que existe uma ligação mecânica na interface entre os materiais, normalmente materializada através de conectores, que garante uma interacção eficaz. O aço e o betão apresentam características bastante distintas, mas quando combinados, complementam-se eficazmente, trazendo grandes vantagens estruturais (SSEDTA, 2001; Calado e Santos, 2010):

- o betão é eficiente à compressão e o aço à tracção;
- o betão minimiza ou evita os fenómenos de instabilidade dos perfis de aço;
- o betão garante a protecção necessária contra o fogo e a corrosão dos elementos metálicos;
- o aço confere ductilidade ao elemento;
- ambos os materiais possuem um coeficiente de dilatação térmica semelhante.

As estruturas mistas de aço e betão oferecem grandes vantagens relativamente às estruturas metálicas e às estruturas em betão armado. De acordo com Johnson (2004), é normalmente mais económico utilizar vigas mistas do que vigas de betão para vãos superiores a 10 metros, especialmente em casos onde a resistência ao fogo não é condicionante. De facto, no que toca a elementos estruturais com dimensões semelhantes, os elementos mistos apresentam uma maior capacidade de carga (Calado e Santos, 2010). Outra vantagem do ponto de vista económico provém do facto de as estruturas mistas apresentarem uma maior rapidez na sua execução, podendo o aço servir de apoio, contraventamento e cofragem colaborante da restante estrutura. A presença do aço contribui para uma maior ductilidade das estruturas de betão armado, fazendo com que estas, em caso de sismo, apresentem um melhor comportamento. Em relação à construção metálica, a presença do betão nos elementos mistos, além de conferir um aumento da sua resistência e minimizar fenómenos de encurvadura, fornece também geralmente a protecção necessária à corrosão e ao fogo (Johnson, 2004; SSEDTA, 2001; Calado e Santos, 2010). A escolha em se utilizar elementos mistos está dependente de vários factores, mas em geral estes elementos tornam-se bastante competitivos em estruturas com médios a grandes vãos, quando a rapidez de construção é um factor a ter em causa, ou em estruturas em que as exigências de protecção ao fogo são de baixa ou média ordem (e.g., pontes ou edifícios de escritórios) (Johnson, 2004).

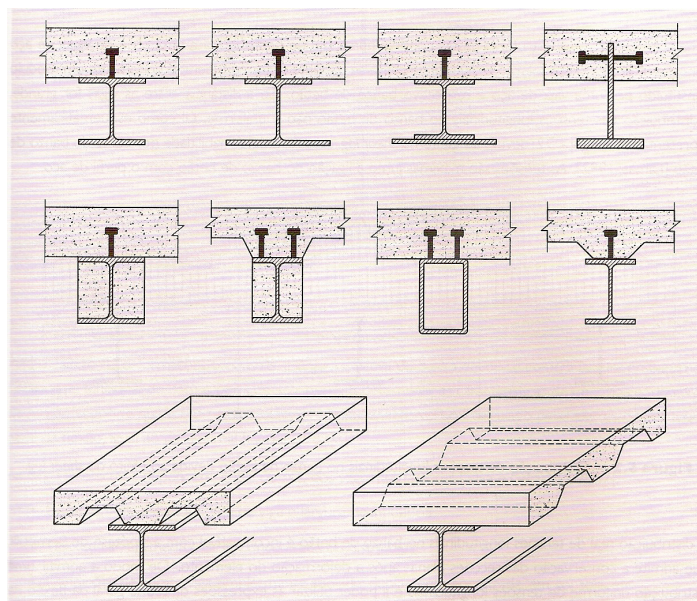


Figura 1.1: Exemplos de secções transversais mistas (Calado e Santos, 2010)

O termo viga mista é empregue para designar um elemento estrutural misto que está sujeito principalmente a esforços de flexão (Calado e Santos, 2010), sendo este elemento constituído, por norma, por uma laje de betão, normalmente armada, assente sobre um perfil de aço, que pode conter a alma envolvida em betão ou não. Em geral, a ligação destes materiais é feita por intermédio de conectores que evitam o escorregamento entre os materiais, de modo a que estes actuem como um só.

As secções transversais das vigas mistas podem apresentar diversas tipologias (figura 1.1). Esta diversidade advém do facto da secção mista depender do tipo de perfil a utilizar (laminado, soldado; em I, tubular; betonado ou não betonado; mono-simétrico ou bi-simétrico) e do tipo de laje (betão armado, mista; com nervuras).

Segundo o EC4, quando se estudam vigas mistas, torna-se necessário efectuar um conjunto de verificações de segurança regulamentares, sendo uma delas a verificação da segurança à encurvadura lateral, a qual será abordada em pormenor neste trabalho. Este fenómeno de instabilidade, que condiciona o dimensionamento de vigas metálicas não contraventadas com reduzida rigidez de torção, também pode ocorrer nas vigas mistas com uma secção transversal em I , sujeitas à flexão em relação ao eixo principal de maior inércia (secções tubulares quadradas, rectangulares ou circulares não são susceptíveis à encurvadura lateral). Contudo, ao contrário do que sucede no caso das vigas metálicas, nas vigas mistas o fenómeno só ocorre para momentos negativos, isto é, quando o banzo inferior está comprimido, comportando-se como uma coluna sob fundação elástica em que a rigidez da “fundação” é principalmente devida à rigidez da alma do perfil à flexão transversal (Calado e Santos, 2010). De facto, o banzo superior, se estiver devidamente conectado à laje de betão armado (cláusula 6.4.1(1) do EC4), respeitando a regra dada pela cláusula 6.6.5.5(3) do EC4, poderá ser considerado como lateralmente estável. Como o banzo superior está restringido pela laje, a secção transversal fica assim impedida de rodar como um corpo rígido, sendo este modo caracterizado pela distorção do perfil (ver figura 1.2 (a)).

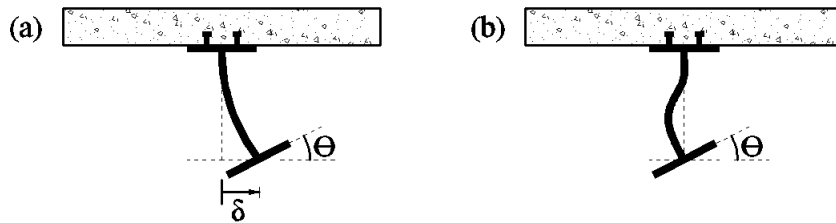


Figura 1.2: (a) Modo de encurvadura distorcional; (b) Modo de encurvadura local

Além do modo distorcional, que vai ser objecto de análise nesta dissertação, é importante referir que as vigas mistas sujeitas a momentos flectores negativos também podem sofrer de instabilidade local no banzo comprimido e/ou na zona comprimida da alma, tal como ilustrado na figura 1.2 (b) (Bradford e Kemp, 2000). Estes modos de encurvadura, local e distorcional, dependem de vários factores, sendo os mais importantes o tipo de carregamento, o comprimento da viga, o ponto de inflexão do momento positivo para o momento negativo, condições de fronteira do banzo inferior, a razão entre a espessura da alma e a espessura do banzo (Salah e Gizejowski, 2008).

A encurvadura lateral, segundo o EC4, é controlada garantindo que o valor de cálculo do momento actuante máximo negativo, M_{Ed} , seja inferior ao valor de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral, $M_{b,Rd}$, o qual é obtido reduzindo o valor do momento flector resistente no apoio interno, M_{Rd} de um factor, χ_{LT} ($M_{b,Rd} = \chi_{LT} M_{Rd}$). Este factor depende da esbelteza normalizada λ_{LT} , que por sua vez depende do valor de momento crítico elástico M_{cr} , que é admitido pelo EC4 do conhecimento comum dos projectistas (CEN, 2004). Uma expressão para a determinação de M_{cr} era disponibilizada no Anexo B da versão ENV do EC4 (CEN, 2000).

1.2 Revisão bibliográfica

A bibliografia que serviu de base à execução deste documento foi, para além do EC4 e das normas EN1992-1-1 (CEN, 2004) e EN1993-1-1 (CEN, 2004), abreviadamente designadas por EC2 e EC3, respectivamente, os livros de Calado e Santos (2010) e de Johnson e Anderson (2004). Contudo, para um melhor entendimento do estado da arte relativamente à encurvadura em vigas mistas, far-se-á referência a alguns dos estudos mais importantes sobre este tema.

Bradford e Gao (1992) apresentaram uma solução para vigas mistas biencastadas baseada numa análise elástica, como modelo de um tramo interior de uma viga mista contínua, sujeita a uma carga uniformemente distribuída, ou seja, sujeita a um diagrama de momentos flectores não uniformes. Como o diagrama de momentos flectores é dependente da rigidez de flexão da viga e esta varia consoante o momento é positivo (betão não fendilhado) ou negativo (betão fendilhado), esta análise não é trivial, tendo os autores determinado a posição em que o diagrama de momentos flectores troca o seu sinal. De seguida, procederam à determinação do momento crítico utilizando um modelo de elementos finitos anteriormente desenvolvido e validado por um dos autores (Bradford e Trahair, 1981), em que a deformação por flexão transversal da alma é tida em conta utilizando uma função cúbica. Estes autores conduziram

ainda um estudo paramétrico em que estudam o efeito de vários factores geométricos no momento crítico.

Neste trabalho apresenta-se também uma comparação entre os valores do momento crítico distorcional M_d e o momento de encurvadura lateral de flexão-torção M_0 , concluindo-se que o primeiro é maior que o segundo, excepto para vãos muito pequenos, em que estes valores são muito próximos. Estes resultados são explicados pelo incremento de rigidez oferecido pela laje de betão e pela alma de aço, que previne a encurvadura do banzo inferior. A utilização de M_0 no dimensionamento de vigas mistas seria, então, muito conservativo, excepto para vigas muito pequenas.

Kemp e Trincherio (1995) utilizaram a equação que rege o momento crítico elástico para vigas de aço (1.1),

$$M_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2} \right)}, \quad (1.1)$$

ou seja, sem os efeitos de distorção da secção, para adaptá-la aos efeitos da encurvadura distorcional (vigas mistas). Para tal os autores definiram propriedades “efectivas” da secção, as quais são obtidas multiplicando a constante de empenamento I_w , a inércia de flexão em torno do eixo de menor inércia I_z e o factor de rigidez à torção J pelos coeficientes C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente. Estes coeficientes dependem de dois coeficientes de rigidez (R_1 e R_2), que têm em consideração a restrição exercida pela alma, a qual depende da rigidez de torção e da rigidez lateral do banzo à compressão, e dependem ainda de sistemas de molas que simulam o comportamento correspondente a cada coeficiente.

Os efeitos das imperfeições geométricas e das tensões residuais são tidos em conta usando módulos efectivos (E_{eff} e G_{eff}). Os efeitos da fendilhação do betão e do gradiente de momentos são considerados ajustando o vão livre a um vão equivalente sujeito a um momento uniforme, que depende do comprimento do vão livre e do tipo de carregamento.

Os autores fazem também um estudo da resistência à encurvadura para casos elásticos e elastoplásticos. Estes resultados foram validados através de comparação com resultados obtidos por outros autores, usando o método dos elementos finitos, e resultados obtidos com a norma BS5400.

Collin *et al.* (1997) desenvolveram um método de dimensionamento de vigas metálicas em I , em relação à encurvadura lateral do banzo inferior, com o banzo superior restringido lateralmente. Este método veio a ser incluído no Eurocódigo 3 - Parte 2 (EC3-2). As soluções apresentadas pelos autores para o cálculo do momento crítico podem ser aplicadas em vãos de extremidade e vãos interiores e para diferentes valores de momentos negativos nos apoios. Este método considera que o banzo superior está restringido na direcção lateral e suporta uma carga uniformemente distribuída. O método foi desenvolvido com a intenção de ser usado em vigas de parede fina e despreza a constante de torção de St. Venant. Tal como em vigas mistas, trata-se de uma encurvadura do banzo inferior junto aos apoios de continuidade (banzo comprimido), em que o banzo é elasticamente restringido pela alma. Os autores apresentam duas equações para o cálculo do momento crítico, em que a primeira aproxima a encurvadura a uma onda longitudinal e a segunda aproxima a duas ondas (longitudinais), devendo-se usar as duas equações e utilizar o menor valor das duas. Estas fórmulas foram comparadas com a formulação do EC4-1 e com valores obtidos pelo método dos elementos finitos, chegando-se à conclusão que estes métodos apresentam valores mais baixos, principalmente porque a constante (rigidez) de torção de St. Venant é desprezada.

Os autores apresentaram também um procedimento de dimensionamento na qual desenvolvem uma expressão para calcular a esbelteza λ e o factor de redução χ , baseados num com-

primento de encurvadura l_c , do banzo comprimido, que se baseia num procedimento normal de dimensionamento de um pilar. Os procedimentos foram comparados com os procedimentos do EC3-1 e com o método mais refinado do EC3-2 (até à data), e chegou-se à conclusão que os valores entre o método apresentado e o EC3-2 estão de acordo.

Bradford (1998) desenvolveu um método energético para analisar a encurvadura distorcional elastoplástica de vigas soldadas com secção em I , sujeitas a momento uniforme. Este método teve em consideração a restrição total à translação e a restrição parcial à torção do banzo traccionado, como é normal ocorrer nas vigas de pontes. No desenvolvimento do método energético, o autor considerou uma lei constitutiva elastoplástica para o aço estrutural. Consideraram-se tensões residuais resultantes do processo de soldadura nas zonas de junção dos banzos à alma. Para o modo de encurvadura, assumiu-se um andamento longitudinal sinusoidal. Assumiu-se ainda que a alma encurva no plano da secção transversal segundo uma função cúbica, em que as constantes desta função são determinadas tendo em conta os deslocamentos e as rotações dos banzos.

Bradford e Kemp (2000), fizeram uma revisão geral dos trabalhos encontrados até à data na literatura sobre os fenómenos de encurvadura locais e globais em vigas mistas. Segundo os autores estes fenómenos ocorrem em zonas de momentos negativos, em que o banzo inferior do perfil estrutural se encontra comprimido e o banzo superior se encontra restringido pela laje de betão. Os modos de encurvadura podem ser locais ou globais, sendo o primeiro caracterizado pela deformação da alma e o segundo pela distorção do perfil metálico (encurvadura distorcional).

Os autores concluem que a encurvadura em vigas mistas é ainda um tema pouco desenvolvido na engenharia, mostrando a necessidade de se obter um método global para modelar este comportamento, de forma mais precisa e com regras de dimensionamento uniformes.

Hanswille (2000), desenvolve um modelo de cálculo de momentos críticos elásticos baseado no modelo de estrutura em “U” invertido, em que o perfil de aço está lateralmente e elasticamente impedido de rodar pela laje de betão. A determinação do momento crítico elástico é possível fazendo uma analogia entre a teoria do membro comprimido sob fundação elástica e as restrições lateral e torção elástica da encurvadura lateral de torção. Hanswille utiliza equações de equilíbrio diferenciais para resolver o problema, que se baseia na teoria de Vlasov, em que as restrições de empenamento do banzo inferior são incluídas. O autor apresenta métodos de cálculo do momento crítico elástico de vigas simplesmente apoiadas e de vigas contínuas, em que no segundo caso é necessário a utilização de ábacos e o cálculo de uma constante de torção de St. Venant efectiva ($GI_{T,eff}$), para ter em conta a distribuição de tensões ao longo da viga mista. Hanswille apresenta um exemplo de aplicação do método para o caso de uma viga contínua e compara-o com o Anexo B da ENV (CEN, 2000), de onde conclui que a ENV apresenta valores inseguros.

Vrcelj e Bradford (2006) estudaram o modo de encurvadura distorcional restringido, RDB (sigla proveniente da designação inglesa “Restrained Distortional Buckling”), de vigas mistas sujeitas à flexão composta, que envolve a distorção da alma no plano da secção transversal. No artigo é descrito um modelo baseado num método energético que permite calcular as cargas críticas elásticas de colunas-viga simplesmente apoiadas, com secção transversal constituída por um perfil de aço em I , duplamente simétrico, e uma laje de betão, sujeitas a esforços uniformes axiais e de flexão, combinados. Os autores concluíram que o modelo proposto conduz a uma boa precisão (inferior a 1%) para um número de funções de aproximação sinusoidais entre nove e doze (problemas com flexão composta). São ainda apresentados vários estudos paramétricos.

Vrcelj e Bradford (2009) desenvolveram um método para determinar as cargas de bi-

furcação elastoplásticas de vigas mistas com secção transversal com parede fina baseado no método “bubble augmented spline finite strip” (uma variante do método das faixas finitas usual), desenvolvido também pelos mesmo autores em 2007 (Vrcelj e Bradford, 2007). São estudadas vigas mistas simplesmente apoiadas e contínuas. Os autores apresentam um estudo de validação do método desenvolvido, a partir de comparações com os resultados do método já desenvolvido pelos próprios (Vrcelj e Bradford, 2007), para o caso elástico. Os autores concluem que, para vigas mistas contínuas, existe uma redução significativa da capacidade de carga última como resultado da não-linearidade do material, da encurvadura local e da encurvadura distorcional. Para além disso, é referido que o modo de encurvadura para vãos pequenos é predominantemente local, enquanto que para grandes vãos é lateral-distorcional.

Recentemente, Gonçalves e Camotim (2010) aplicaram a Teoria Generalizada de Vigas (GBT, sigla proveniente da designação inglesa “Generalized Beam Theory”) à análise de vigas mistas. Neste trabalho, entre outros estudos, os autores investigaram a variação do momento crítico elástico (modo distorcional) em vigas mistas simplesmente apoiadas sujeitas a momentos uniformes, concluindo que os valores obtidos por este método são extremamente precisos.

1.3 Motivação e Objectivos

Conforme foi referido, um dos fenómenos de instabilidade mais importantes em vigas mistas é o fenómeno da encurvadura distorcional, o qual condiciona significativamente o dimensionamento destes elementos. Apesar de vários autores terem estudado o fenómeno e proposto métodos de análise apropriados, é sabido que se trata de um assunto ainda relativamente pouco explorado e em relação ao qual há a necessidade de fornecer regras mais gerais e fáceis de aplicar.

A presente dissertação tem como principal objectivo continuar o trabalho desenvolvido por Gonçalves e Camotim (2010), aplicando a GBT à análise da encurvadura de vigas mistas. Em particular, obtêm-se expressões analíticas para o cálculo do momento crítico elástico em vigas simplesmente apoiadas e sujeitas a momento uniforme (caso de referência). Para além disso, desenvolve-se e implementa-se em *Maple 13* (Maple Inc., 2009) um método numérico para a determinação de momentos críticos em casos mais gerais (momento não-uniforme). Apresentam-se vários exemplos ilustrativos do método proposto. Para efeitos de validação, os resultados obtidos com a formulação proposta são comparados com os fornecidos por outros autores, bem como com a formulação apresentada no EC4 (ENV).

1.4 Organização da tese

No segundo capítulo apresentam-se e discutem-se dois métodos para o cálculo de momentos críticos em vigas mistas: o método do EC4 (ENV) e o método de Hanswille (Hanswille, 2000). São apresentados os fundamentos da GBT e é desenvolvido um método baseado nesta teoria. Por fim, todos os métodos são comparados em pormenor, para mostrar as suas semelhanças e diferenças.

No terceiro capítulo são apresentados alguns exemplos ilustrativos. O primeiro exemplo tem como principal objectivo a validação do método desenvolvido, através da comparação com os resultados obtidos por Gonçalves e Camotim (2010). Seguidamente estuda-se uma viga simplesmente apoiada sujeita a momento constante negativo. Finalmente, aborda-se uma viga contínua com carregamento de vão uniforme. A estes casos são aplicados os diversos métodos apresentados, fazendo-se no final uma comparação qualitativa entre eles.

No quarto capítulo são referidas as conclusões principais a retirar dos estudos efectuados, assim como são mencionados alguns dos possíveis desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Métodos de análise do modelo em “U” invertido

2.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados vários métodos analíticos para o cálculo de momentos críticos em vigas mistas com um perfil de aço estrutural em I e será desenvolvido um modelo analítico, baseado na GBT. Estes métodos baseiam-se num modelo de estrutura em “U” invertido (ver figura 2.1), modelo este que visa simular o comportamento de uma viga mista constituinte de um sistema constituído por várias (pelo menos duas) vigas, dispostas paralelamente, todas ligadas à mesma laje de betão. A tendência para o banzo inferior deslocar-se lateralmente, quando a viga se encontra sujeita a momentos flectores negativos, causa flexão transversal da alma do perfil de aço e uma rotação de torção diferencial entre os banzos inferior e superior (ou seja, há uma distorção do perfil de aço). A rotação do banzo superior está, por sua vez, restringida parcialmente pela rigidez de flexão transversal da laje de betão.

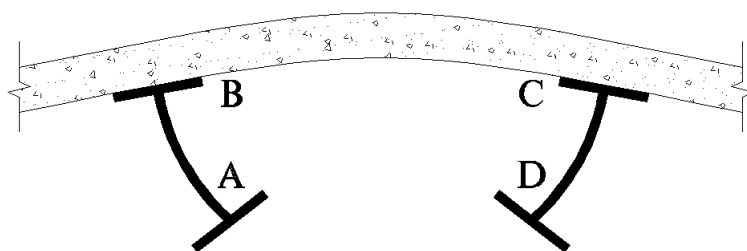


Figura 2.1: Encurvadura em vigas mistas.

2.2 Método do Eurocódigo 4

Segundo o Anexo B da ENV 1994-1-1 (CEN, 2000), o momento crítico elástico M_{cr} é calculado com base na resposta do modelo de estrutura em “U” invertido (ABCD na figura 2.1), que

Capítulo 2. Métodos de análise do modelo em “U” invertido

resulta na seguinte expressão analítica

$$M_{cr} = \frac{k_c C_4}{L} \sqrt{\left(GI_{at} + \frac{k_s L^2}{\pi^2} \right) E_a I_{afz}}, \quad (2.1)$$

onde:

- A parcela GI_{at} representa a rigidez de torção de St. Venant do perfil metálico, onde G é o módulo de distorção do aço estrutural e I_{at} é a constante de torção de St. Venant da secção de aço estrutural, dada por,

$$I_{at} = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3, \quad (2.2)$$

sendo o somatório extendido a todas as paredes i da secção.

- k_s , representa a rigidez de flexão transversal da estrutura de “U” invertido, por unidade de comprimento de viga mista, ou seja, a rigidez que abrange a deformação da laje, k_1 , e a flexão transversal da alma do perfil de aço, k_2 . A rigidez de flexão da laje é obtida aplicando uma rotação unitária à laje e admitindo que esta se encontra fendilhada, sendo dada por

$$k_1 = \frac{\alpha E_a I_2}{a}, \quad (2.3)$$

e permite considerar diversas condições de apoio da laje através do factor α . Na figura 2.2 mostram-se os valores de α a considerar em vários casos.

- A rigidez de flexão da alma é obtida a partir da figura 2.3 (a), com $I = \frac{t_w^3}{12(1-\nu_a^2)}$ (de acordo com a teoria das lajes), ou seja

$$k_2 = \frac{3E_a t_w^3}{12(1-\nu_a^2)h_s}, \quad (2.4)$$

em que E_a é o módulo de elasticidade do aço estrutural, t_w é a espessura da alma do perfil de aço estrutural, ν_a é o coeficiente de Poisson do aço estrutural, e h_s é a distância entre as linhas médias dos banzos do perfil de aço estrutural.

Desta forma, visto se tratar de um sistema de rigidezes (molas) em série, a rigidez total é obtida a partir da figura 2.3 (b), sendo dada por,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{Fh_s^3}{3EI} + \frac{Fh_s^2}{k_1} = Fh_s^2 \left(\frac{h_s}{3EI} + \frac{1}{k_1} \right) = Fh_s^2 \left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1} \right) \\ \Rightarrow k_s &= \frac{Fh_s}{\delta/h_s} \Rightarrow k_s = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

- $E_a I_{afz}$ é a rigidez de empenamento do banzo inferior quando este desloca uma unidade na horizontal, em que I_{afz} é a inércia do banzo inferior em torno do eixo central vertical,

$$I_{afz} = \frac{b_f^3 t}{12}; \quad (2.6)$$

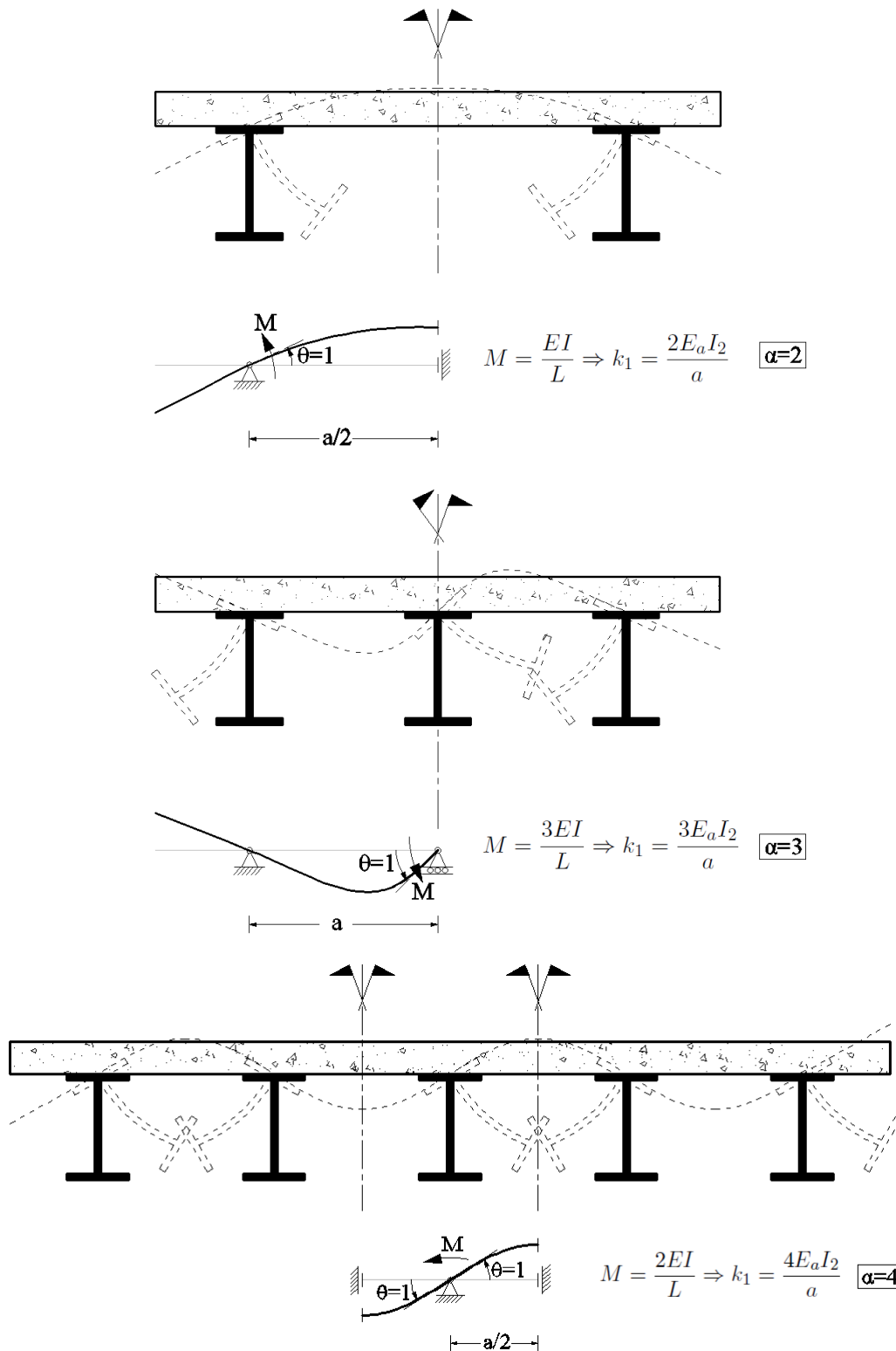


Figura 2.2: Simplificações para as condições de apoio da laje e modelos de cálculo da rigidez da laje, k_1

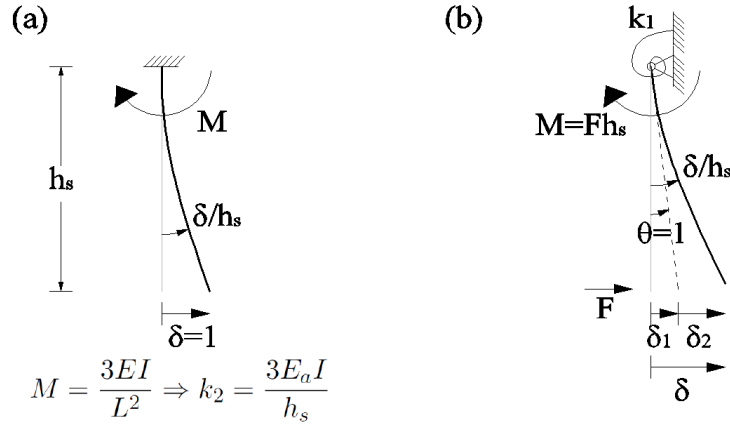


Figura 2.3: (a) Modelo de cálculo da rigidez da alma, k_2 ; (b) Modelo de cálculo da rigidez de flexão transversal, k_2

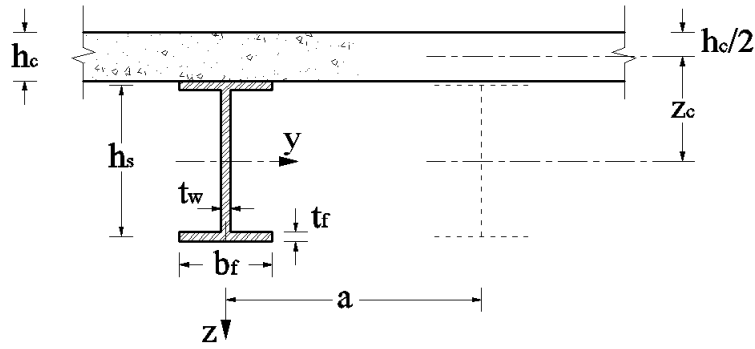


Figura 2.4: Geometria do modelo em “U” invertido

- k_c é um parâmetro que tem em conta as propriedades da secção de aço estrutural, que para o caso das secções em I (bi-simétrica) é dado por,

$$k_c = \frac{\frac{h_s I_y}{I_{ay}}}{\left[\frac{\left(\frac{h_s^2}{4} + i_x^2 \right)}{e} + h_s \right]}, \quad (2.7)$$

com

$$e = \frac{A I_{ay}}{A_a z_c (A - A_a)}, \quad i_x^2 = \frac{I_{ay} + I_{az}}{A_a}, \quad (2.8)$$

A é a área da secção mista equivalente, desprezando o betão traccionado, ou seja, $A_a + A_s$, em que A_s é a área da armadura longitudinal e A_a é a área de aço do perfil, I_y é a inércia da secção mista fendilhada segundo y , I_{ay} e I_{az} são as inércias do perfil segundo y e z , respectivamente e as dimensões h_s e z_c são dadas na figura 2.4.


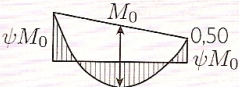
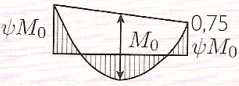
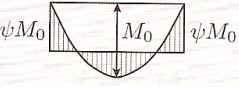
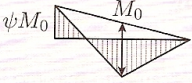
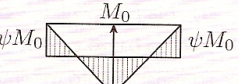
Diagrama de momentos flectores	C_4								
	$\psi=0,50$	$\psi=0,75$	$\psi=1,00$	$\psi=1,25$	$\psi=1,50$	$\psi=1,75$	$\psi=2,00$	$\psi=2,25$	$\psi=2,50$
	41,50	30,20	24,50	21,10	19,00	17,50	16,50	15,70	15,20
	33,90	22,70	17,30	14,10	13,00	12,00	11,40	10,90	10,60
	28,20	18,00	13,70	11,70	10,60	10,00	9,50	9,10	8,90
	21,90	13,90	11,00	9,60	8,80	8,30	8,00	7,80	7,60
	28,40	21,80	18,60	16,70	15,60	14,80	14,20	13,80	13,50
	12,70	9,80	8,60	8,00	7,70	7,40	7,20	7,10	7,00

Figura 2.5: Valores de C_4 para vigas com carregamento de vão (Calado e Santos, 2010)

Diagrama de momentos flectores	C_4				
	$\psi = 0,00$	$\psi = 0,25$	$\psi = 0,50$	$\psi = 0,75$	$\psi = 1,00$
	11,10	9,50	8,20	7,10	6,20
	11,10	12,80	14,60	16,30	18,10

Figura 2.6: Valores de C_4 para vigas sem carregamento de vão (Calado e Santos, 2010)

Diagrama de momentos flectores	L_c/L	C_4			
		$\psi = 0,00$	$\psi = 0,50$	$\psi = 0,75$	$\psi = 1,00$
	0,25	47,60	33,80	26,60	22,10
	0,50	12,50	11,00	10,20	9,30
	0,75	9,20	8,80	8,60	8,40
	1,00	7,90	7,80	7,70	7,60

Figura 2.7: Valores de C_4 para vigas com uma extensão em consola (Calado e Santos, 2010)

- L é o vão da viga mista e C_4 é um coeficiente cujo valor depende da forma do diagrama de momentos flectores a actuar na viga mista (ver figuras 2.5, 2.6 e 2.7) e que influência fortemente o valor do momento crítico.

2.3 Método de Hanswille

O modelo de cálculo apresentado por Hanswille (2000) baseia-se também no modelo de “U” invertido, como o modelo do EC4 (Figura 2.1), em que a secção de aço está lateralmente contraventada e elasticamente impedida de rodar pela laje de betão.

A equação diferencial para o problema apresentado na figura 2.8 baseia-se na teoria de Vlasov, em que as restrições de empenamento são incluídas, acrescidas da restrição da rotação do perfil devido à laje de betão e à restrição da alma do perfil, sendo a rotação ϕ da secção da viga mista, para o problema apresentado, regida pela seguinte equação diferencial

$$EI_{WD}\phi'''' + [(k_z M_y - GI_T)\phi']' + C_\phi\phi = m_T. \quad (2.9)$$

No primeiro termo da equação diferencial EI_{WD} representa a rigidez de empenamento do perfil para uma rotação em torno do banzo superior, dada por

$$I_{WD} = I_{WM} + z_D^2 I_{az}, \quad (2.10)$$

onde o primeiro termo (I_{WM}) é a constante de empenamento do perfil em relação ao seu centro de corte (M) e o segundo representa a alteração do centro de rotação (ver figura 2.9), sendo I_{az} o momento de inércia em relação ao eixo z . Tendo em conta a figura 2.9, determina-se constante de empenamento da secção quando o perfil roda uma unidade sob o seu centro de corte M (com $d_1 = d_2 = h_s/2$), da seguinte forma

$$I_{WM} = \int u^2 dy = 4t \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} \theta \frac{h_s}{2} \right)^2 \frac{b}{2} \right] = \frac{b^3 t}{24} h_s^2 \quad (2.11)$$

e o incremento (Δ) de inércia adicional devido à alteração do centro de rotação M para o centro D (com $d_i = d_i + \Delta$ e $d_1 = -d_2$), é dado por

$$\begin{aligned} I_{WD-M} &= \int u^2 dy = 2t \left[\frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} \theta (d_1 + \Delta)^2 \frac{b}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} \theta (-d_1 + \Delta)^2 \frac{b}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{b^3 t}{12} [d_1^2 + 2\Delta d_1 + \Delta^2 + (-d_1^2 - 2\Delta d_1 + \Delta^2)] = \frac{b^3 t}{6} \Delta^2 = I_z z_D^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim sendo,

$$I_{WD} = I_{WM} + I_{WD-M} = \frac{b^3 t}{24} h_s^2 + I_z z_D^2 = \frac{b^3 t}{12} h_s^2. \quad (2.13)$$

O segundo termo da equação diferencial contém a rigidez de torção do perfil (GI_T), em que se considera que este roda como um corpo rígido, e k_z é um parâmetro geométrico do perfil, dado por

$$k_z = \left[\frac{(z_D + z_M)^2 + i_p^2}{z_e} + 2z_D \right] \frac{I_{ay}}{I_{st,y}}, \quad (2.14)$$

com

$$z_e = -\frac{I_{ay}}{z_{st,a} A_a} \quad (2.15)$$

e z_D é a distância da linha média do banzo superior ao centro de corte do perfil, z_M é a coordenada do centro de corte, $z_{st,a}$ é a distância entre os baricentros do perfil e da secção mista, desprezando o betão fendilhado, i_p é o raio de giração polar, dado por $i_p^2 = \frac{I_{ay} + I_{az}}{A_a}$, I_{ay} e I_{az} são as inércias centrais do perfil segundo y e z , respectivamente, A_a é a área do perfil,

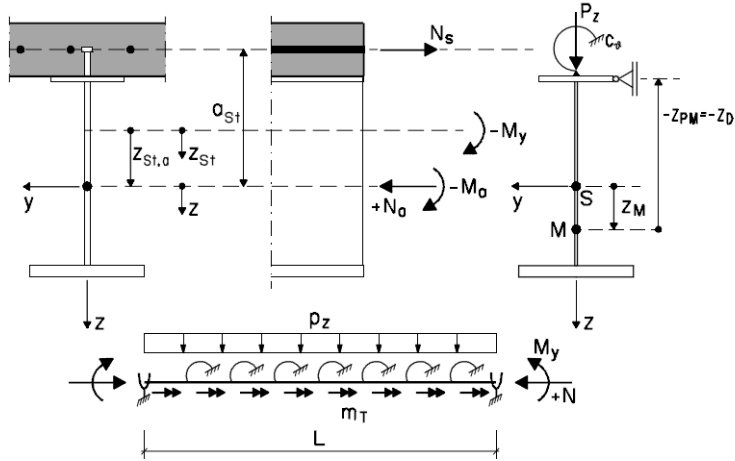


Figura 2.8: Modelo para determinar o momento crítico elástico de encurvadura distorcional de vigas mistas (Hanswille, 2000)

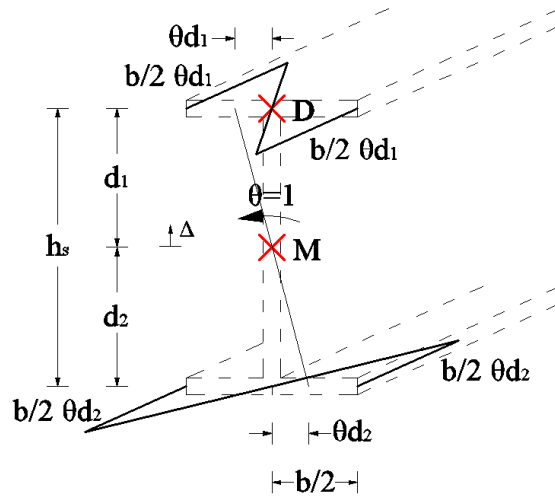


Figura 2.9: Modelo de alteração do centro de corte

$I_{st,y}$ é a inércia da secção mista em relação ao eixo central da secção (mista) paralelo a y , desprezando o betão fendilhado.

O terceiro termo da equação diferencial tem em conta a restrição da laje e da alma do perfil que é igual a k_s ($C_\phi = k_s$), ou seja, pela expressões (2.5), (2.3) e (2.4).

2.3.1 Vigas sujeitas a momento uniforme

Hanswille apresenta a expressão que permite calcular momentos críticos de vigas sujeitas a momento uniforme negativo. Para isso utilizou funções sinusoidais $\phi_k(x) = \bar{\phi}_k \sin(n\pi x/L)$ ($\bar{\phi}_k$ é a amplitude e n é o número de ondas do modo de deformação) na equação 2.9, as quais constituem a solução exacta da equação e fornecem

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 EI_{WD}}{(\beta_B L)^2} + GI_T \right], \quad (2.16)$$

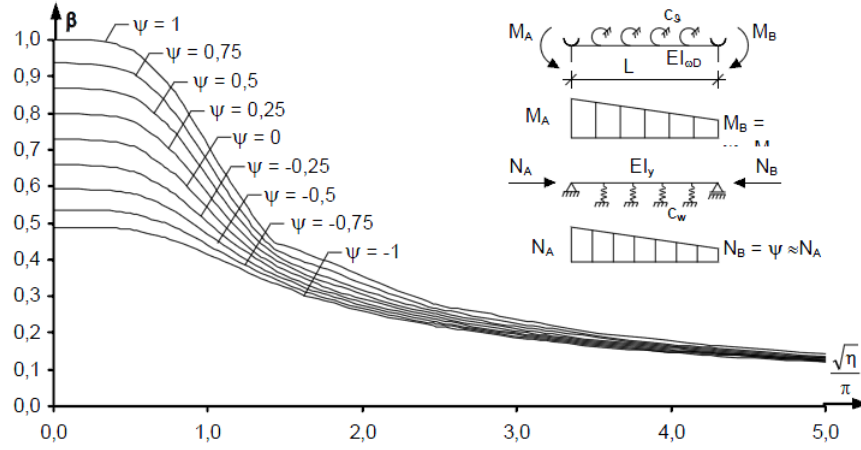


Figura 2.10: Factor de comprimento efectivo β_B para membros com diferentes momentos de extremidade e sem carregamento uniformemente distribuído (Hanswille, 2000)

em que os factores de comprimento β_B e η_B são os seguintes

$$\beta_B = \sqrt{\frac{1}{n^2 + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{\eta_B}{\pi}\right)^2}}, \quad (2.17)$$

e

$$\eta_B = \sqrt{\frac{C_\phi L^4}{EI_{WD}}}. \quad (2.18)$$

O valor do momento crítico mínimo é obtido minimizando a expressão em relação a L 2.16 e é dado por

$$M_{cr,min} = \frac{1}{k_z} \left[2\sqrt{EI_{WD}C_\phi} + GI_T \right]. \quad (2.19)$$

2.3.2 Vigas sujeitas a momento variável

Para os casos em que se tem uma viga com diferentes momentos de extremidade combinados com uma carga distribuída uniforme, Hanswille desenvolveu uma expressão idêntica à expressão (2.16), para vigas sujeitas a momentos flectores uniformes, baseada também na analogia apresentada na figura 2.8 e descrita pela equação (2.9). Neste caso, o factor de comprimento β_B , em vez de ser calculado através da expressão (2.17), é obtido com o auxílio dos ábacos apresentados nas figuras 2.10 e 2.11. Hanswille descreve que neste caso a constante de St. Venant depende da distribuição de tensões ao longo da viga e, se essa distribuição não for constante, tal facto afecta significativamente o valor do momento crítico. Para tal Hanswille introduz uma constante de St. Venant “efectiva” $GI_{T,eff}$, que depende da razão entre os momentos de extremidade ψ e o factor A , dado nas figuras 2.10 e 2.11. O valor de A depende do valor do $\alpha = M_0/M$. Assim, a equação de M_{cr} pode ser reescrita da seguinte forma

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 EI_{WD}}{(\beta_B L)^2} + GI_{T,eff} \right], \quad (2.20)$$

em que $GI_{T,eff} = A(1,5 - 0,5\psi)GI_T$ e η está definido em (2.18).

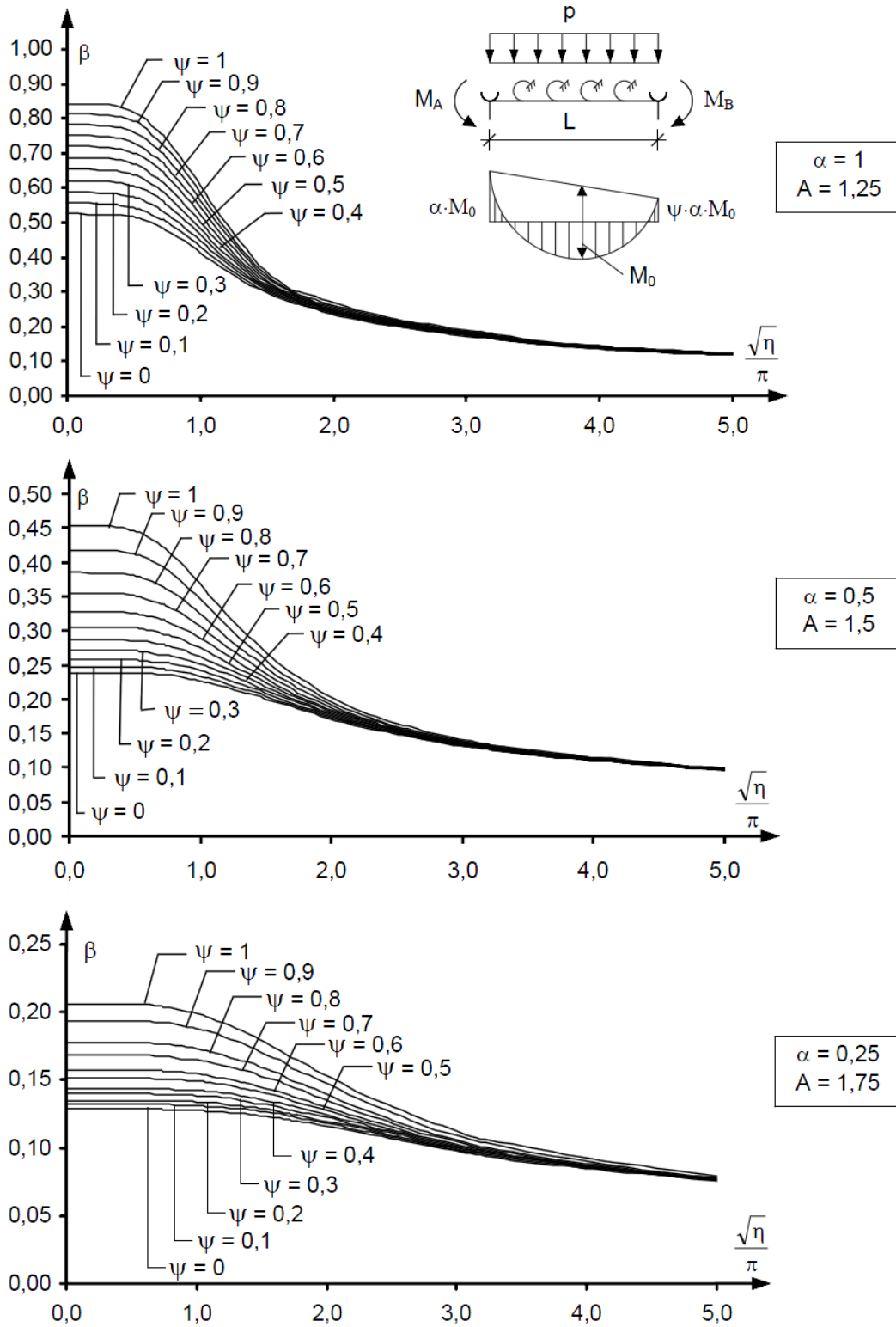


Figura 2.11: Factor de comprimento efectivo β_B para membros com momentos nas extremidades e com carregamento uniformemente distribuído (Hanswille, 2000)

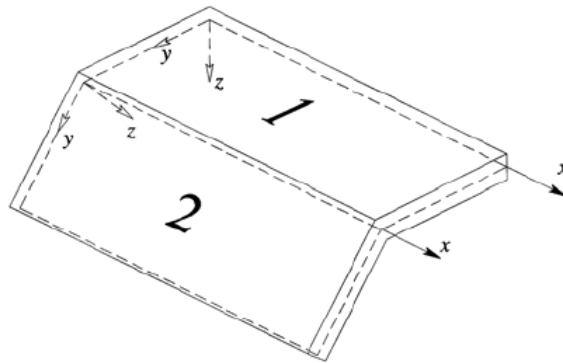


Figura 2.12: Representação sistema de eixos locais de um membro prismático de paredes finas (Gonçalves e Camotim, 2010)

2.4 Método da Teoria Generalizada de Vigas

2.4.1 Introdução

A Teoria Generalizada de Vigas ou GBT (sigla proveniente da designação inglesa «Generalised Beam Theory»), foi inicialmente desenvolvida por Richard Schardt em 1966 (Schardt, 1966), e durante um período de cerca de 20 anos (Davies, 1998). A principal referência neste campo é, ainda hoje, o seu livro (Schardt, 1989). Actualmente esta teoria é utilizada por diversos autores para analisar estruturas constituídas por barras de parede fina, sendo encarada como uma alternativa extremamente vantajosa e clarificadora face aos métodos numéricos tradicionais de análise deste tipo de barras: elementos finitos de casca e faixas finitas (Gonçalves, 2007; Gonçalves e Camotim, 2010). Na GBT, a deformação da secção transversal é incluída enriquecendo o campo de deslocamentos clássico da teoria das peças lineares de Vlasov, mas preservando as características de unidimensionalidade desta teoria. Assim, as incógnitas do problema são as funções de amplitude modal e a análise da participação modal na solução permite uma compreensão profunda do comportamento estrutural.

Nesta secção pretende dar-se a conhecer um pouco da GBT e aplicá-la à análise do modelo de estrutura em “U” invertido, no contexto da determinação de momentos críticos em vigas mistas. Os processos descritos seguidamente sobre a GBT foram baseados nos trabalhos desenvolvidos por Davies (1998) e, mais recentemente, por Gonçalves (2007), Camotim *et al.* (2010) e Gonçalves e Camotim (2007, 2010), como também nas referências aí indicadas.

2.4.2 Descrição do método

Na GBT são consideradas em geral três hipóteses fundamentais (Gonçalves, 2007):

- as barras prismáticas são de parede fina, ou seja, são rectilíneas e de secção constante, em que a espessura é muito pequena quando comparada com as restantes dimensões;
- a hipótese de Kirchhoff é válida, ou seja, após deformação das paredes, as fibras perpendiculares ao folheto médio permanecem indeformadas e perpendiculares ao folheto médio da parede;
- a espessura de cada parede da barra é constante.

Atendendo à segunda hipótese (Kirchhoff), é possível escrever o vector dos deslocamentos e as respectivas componentes do deslocamento, ao longo dos eixos locais de cada parede (ver figura 2.12), através de

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u - zw_{,x} \\ v - zw_{,y} \\ w \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

em que u , v e w são as componentes do deslocamento da linha média de cada parede ao longo de x , y e z , respectivamente, expressos da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{u}_k(y) \phi_k(x), \\ v(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{v}_k(y) \phi_k(x), \\ w(x, y) &= \sum_{k=1}^n \bar{w}_k(y) \phi_k(x), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $\bar{u}_k(y)$, $\bar{v}_k(y)$ e $\bar{w}_k(y)$ são as componentes dos deslocamentos associados ao modo de deformação k e $\phi_k(x)$ são as funções de amplitude longitudinais (ao longo da viga), que constituem as incógnitas do problema. No presente trabalho, considera-se apenas um único modo de deformação da secção transversal, podendo reescrever-se as equações (2.22) da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \bar{u}(y) \phi(x), \\ v(x, y) &= \bar{v}(y) \phi(x), \\ w(x, y) &= \bar{w}(y) \phi(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Uma das grandes particularidades da GBT é a utilização de funções para as componentes $\bar{u}(y)$, $\bar{v}(y)$ e $\bar{w}(y)$ que caracterizam o modo de deformação da secção transversal. Para as determinar procede-se a uma “análise da secção transversal”, em que esta é discretizada (subdividida) num número de paredes, utilizando “nós” (Gonçalves *et al.*, 2010). Cada modo de deformação obtém-se inicialmente impondo um deslocamento unitário (u , v ou w) em cada um dos nós, enquanto que os restantes deslocamentos nodais são impedidos. A configuração da secção transversal no seu próprio plano, associada à imposição de cada deslocamento, é determinada analisando-a como se tratasse de uma estrutura plana sujeita a deslocamentos impostos (e admitindo pequenos deslocamentos). Finalmente, através da resolução de vários problemas de valores e vectores próprios, são determinados os modos de deformação finais da secção transversal (ver figura 2.13).

Além das hipóteses simplificativas descritas anteriormente, são também admitidas outras hipóteses, as quais actuam como restrições cinemáticas e permitem reduzir o número de modos de deformação admissíveis (graus de liberdade do problema), ou seja (Gonçalves, 2007):

- as paredes são inextensíveis no plano da secção transversal;
- a deformação por corte de membrana (no plano médio) é desprezável (hipótese de Vlasov, *i.e.*, $\gamma_{xy}^M = 0$), o que é aceitável em secções abertas.

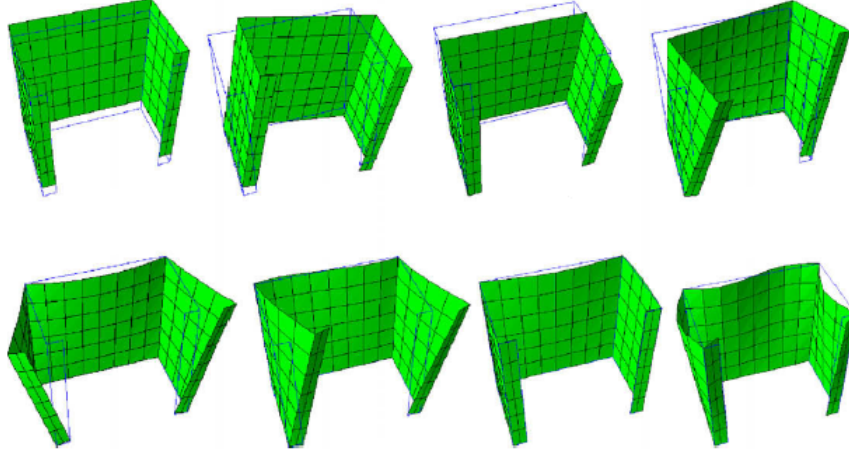


Figura 2.13: Exemplos dos modos de deformação finais da secção transversal (Gonçalves *et al.*, 2010)

Como consequência da introdução da hipótese de Vlasov, os deslocamentos u (empenamento) não são independentes dos deslocamentos v dado que se tem

$$\gamma_{xy}^M = 0 \Leftrightarrow u_{,y} + v_{,x} = 0 \Leftrightarrow (\bar{u}_{,y} + \bar{v})\phi_{,x} = 0 \Rightarrow \bar{u}_{,y} = -\bar{v}. \quad (2.24)$$

Para respeitar a primeira hipótese, a componente v tem de ser constante em cada parede ($\varepsilon_{yy}^M = 0 \Rightarrow \bar{v}_{,y} = 0$) e, a partir de (2.24), \bar{u} tem de ser linear em cada parede.

Para obter as equações de bifurcação no contexto do presente estudo, admite-se que o material é elástico linear e que as deformações de pré-encurvatura são desprezáveis (análise linear de estabilidade). Tal como em estudos semelhantes (Camotim *et al.*, 2006; Gonçalves e Camotim, 2007), apenas se consideram os termos não-lineares associados à deformação longitudinal de membrana. Assim, as relações deformações–deslocamentos são dadas por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^F = u_{,x} + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) - zw_{,xx}, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{yy}^M + \varepsilon_{yy}^F = 0 - zw_{,yy}, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^M + \gamma_{xy}^F = 0 - 2zw_{,xy}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

As expressões de ε_{yy} e γ_{xy} só apresentam termos de flexão em virtude das hipóteses simplificativas cinemáticas.

As variações virtuais das deformações obtêm-se a partir das seguintes equações

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} &= \delta u_{,x} + \delta v_{,x}v_{,x} + \delta w_{,x}w_{,x} - z\delta w_{,xx} = \delta u_{,x} - z\delta w_{,xx} = \bar{u}\delta\phi_{,xx} - z\bar{w}\delta\phi_{,xx}, \\ \delta\varepsilon_{yy} &= -z\delta w_{,yy} = -z\bar{w}_{,yy}\delta\phi, \\ \delta\gamma_{xy} &= -2z\delta w_{,xy} = -2z\bar{w}_{,y}\delta\phi_{,x}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Note-se que o segundo e terceiro termos da expressão de $\delta\varepsilon_{xx}$ desaparecem porque se desprezam as deformações de pré-encurvatura, ou seja, $v = w = 0$.

Procedendo agora à segunda variação (Δ designa uma variação incremental associada ao modo de instabilidade), as equações ficam

$$\begin{aligned} \Delta\delta\varepsilon_{xx} &= \delta v_{,x}\Delta v_{,x} + \delta w_{,x}\Delta w_{,x} = \bar{v}^2\delta\phi_{,xx}\Delta\phi_{,xx} + \bar{w}^2\delta\phi_{,xx}\Delta\phi_{,xx}, \\ \Delta\delta\varepsilon_{yy} &= \Delta\delta\gamma_{xy} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.4. Método da Teoria Generalizada de Vigas

No que se refere às relações constitutivas, admite-se que os materiais apresentam um comportamento elástico linear. Para o (único) termo de membrana, a relação é

$$\sigma_{xx}^M = E\varepsilon_{xx}^M, \quad (2.28)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material. Para os termos de flexão admite-se um estado plano de tensão com

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^F &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{xx}^F + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{yy}^F, \\ \sigma_{yy}^F &= \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{yy}^F + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{xx}^F, \\ \sigma_{xy}^F &= G\gamma_{xy}^F. \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de distorção.

Para estabelecer o sistema de equações necessário à determinação das cargas de bifurcação, utiliza-se o princípio dos trabalhos virtuais na forma incremental, ou seja

$$\Delta \left(\int_V \delta \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma} dV \right) = 0 \Rightarrow \int_V (\Delta \delta \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma} + \delta \varepsilon^t \Delta \boldsymbol{\sigma}) dV = 0 \Rightarrow \int_V (\Delta \delta \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma} + \delta \varepsilon^t \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) dV = 0, \quad (2.30)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}^t = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^t = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]$ e \mathbf{C} é a matriz constitutiva apropriada, traduzindo (2.28) ou (2.29) consoante se tratem de termos de membrana ou termos de flexão. Substituindo os resultados anteriores na expressão do trabalho virtual e resolvendo cada termo do trabalho virtual, obtêm-se as seguintes expressões

$$\int_V \Delta \delta \varepsilon^t \boldsymbol{\sigma} dV = \int_L \int_{\bar{S}} \lambda \sigma_{xx}^M t (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) \delta \phi_{,x} \Delta \phi_{,x} dy \, dx = \lambda \int_L X \delta \phi_{,x} \Delta \phi_{,x} dx. \quad (2.31)$$

para o primeiro termo, onde λ é o parâmetro de carga, e, para o segundo termo tem-se então

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \varepsilon^t \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \\ &= \int_L \int_{\bar{S}} \left[Et \bar{u}^2 \delta \phi_{,xx} \Delta \phi_{,xx} + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{w}^2 \delta \phi_{,xx} \Delta \phi_{,xx} + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{w}_{,yy}^2 \delta \phi \Delta \phi + \right. \\ &+ \left. \frac{Gt^3}{3} \bar{w}_{,y}^2 \delta \phi_{,x} \Delta \phi_{,x} + \frac{\nu Et^3}{12(1-\nu^2)} \bar{w}_{,yy} \bar{w} (\delta \phi \Delta \phi_{,xx} + \delta \phi_{,xx} \Delta \phi) \right] dy \, dx = \\ &= \int_L \left[(C_1 + C_2) \delta \phi_{,xx} \Delta \phi_{,xx} + D_1 \delta \phi_{,x} \Delta \phi_{,x} + B \delta \phi \Delta \phi + D_2 (\delta \phi \Delta \phi_{,xx} + \delta \phi_{,xx} \Delta \phi) \right] dx, \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde as constantes X , C_1 , C_2 , B , D_1 e D_2 são obtidas por integração das funções do modo de deformação na espessura, t , e na linha média da secção transversal, \bar{S} , e são dadas por

$$\begin{aligned} X &= \int_{\bar{S}} \sigma_{xx}^M t (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) dy, \\ C_1 &= \int_{\bar{S}} t E \bar{u}^2 dy, \\ C_2 &= \int_{\bar{S}} D_f \bar{w}^2 dy, \\ B &= \int_{\bar{S}} D_f \bar{w}_{,yy}^2 dy, \\ D_1 &= \int_{\bar{S}} \frac{t^3 G}{3} \bar{w}_{,y}^2 dy, \\ D_2 &= \int_{\bar{S}} \nu D_f \bar{w}_{,yy} \bar{w} dy, \end{aligned} \tag{2.33}$$

em que $D_f = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez de flexão da teoria de lajes de Kirchhoff, C_1 é a rigidez de flexão longitudinal dos termos de membrana, C_2 é a rigidez de flexão longitudinal dos termos de flexão, D_1 é a rigidez de torção, D_2 está associada ao acoplamento por efeito de Poisson, B é a rigidez de flexão transversal e X tem em conta os efeitos geométricos não-lineares, onde, σ_{xx}^M é a distribuição de tensões normais de membrana ao longo da viga.

Com os resultados anteriores, aplicando o teorema fundamental do cálculo das variações a (2.30) de forma a obter uma forma diferencial, obtém-se (Camotim *et al.*, 2006; Camotim *et al.*, 2010)

$$C \Delta \phi_{,xxxx} - D \Delta \phi_{,xx} + B \Delta \phi - \lambda X \Delta \phi_{,xx} = 0, \tag{2.34}$$

em que $C = C_1 + C_2$ e $D = D_1 - 2D_2$.

2.4.3 Aplicação ao modelo em “U” invertido

Pretende-se nesta secção aplicar o método da GBT, anteriormente apresentado, ao estudo do modelo em “U” invertido (ver figura 2.1). Tal como anteriormente referido, apenas se considera um modo de deformação, o que permite simplificar significativamente as equações resultantes.

2.4.3.1 Análise da secção transversal

Para começar, efectua-se a análise da secção transversal, com o objectivo de determinar o modo de deformação distorcional e as respectivas componentes de deslocamento \bar{u} , \bar{v} e \bar{w} para cada parede. Na determinação deste modo serão tidas em conta as hipóteses cinemáticas simplificativas descritas na secção 2.4.2.

No estudo do modelo em “U” invertido considera-se que este é constituído por duas vigas mistas e procede-se a uma simplificação de simetria da estrutura, como indicam as figuras 2.14 e 2.15, onde se apresenta, respectivamente, a geometria da secção transversal e a discretização da mesma secção reduzida às linhas médias das paredes. Para determinar o modo de deformação da secção transversal a “estrutura” foi dividida em 5 paredes¹, como mostra a figura 2.15, onde se representam ainda os eixos locais de cada parede.

¹O troço entre o ponto B e o ponto F (correspondente à distância entre a linha média da laje de betão e a linha média do banzo superior, a_1), considera-se rígido.

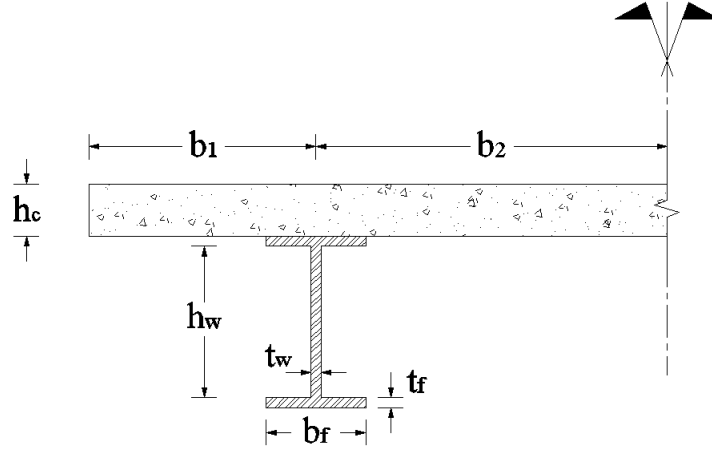


Figura 2.14: Geometria da seção mista da viga

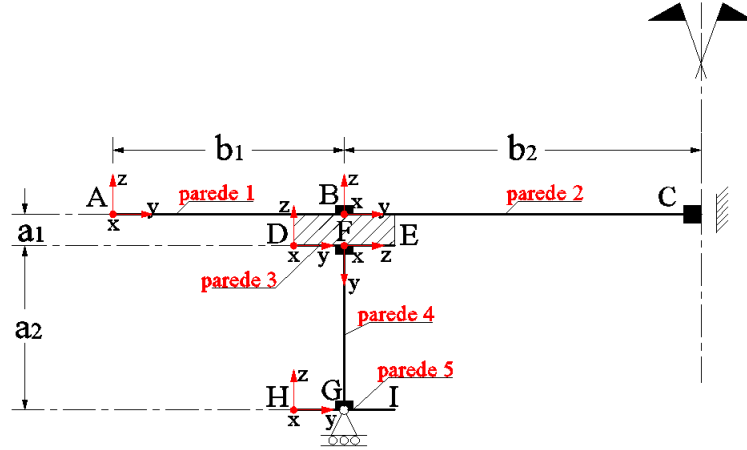


Figura 2.15: Discretização da seção mista da viga

Para determinar as funções que caracterizam o modo distorcional é necessário analisar o sistema estrutural da figura 2.15. Em virtude da hipótese de Vlasov (recorde-se a relação (2.24)) e das condições de simetria, existem apenas três modos de deformação admissíveis envolvendo deslocamentos axiais: (i) o modo axial (deslocamentos axiais constantes na seção), (ii) o modo de flexão (vertical) e (iii) o modo distorcional. O modo distorcional é determinado com a condição de que a respectiva função de empenamento não pode produzir esforço axial e flexão (as funções de empenamento dos três modos admissíveis devem ser mutuamente ortogonais). Tendo em conta as condições de simetria, esta condição verifica-se se existirem deslocamentos axiais unicamente no banzo inferior do perfil, sendo que esses deslocamentos têm de ser anti-simétricos em relação à alma do perfil, tal como mostra a figura 2.16. Assim, através de (2.24), apenas o banzo inferior sofre deslocamento v (constante), tal como mostra a figura.

Para prosseguir, a seção transversal é analisada como se tratasse de uma estrutura plana, cujas “barras” são as paredes constituintes da seção, considerando uma rigidez de flexão D_f apropriada em cada parede. São impostos os deslocamentos v já determinados às paredes da

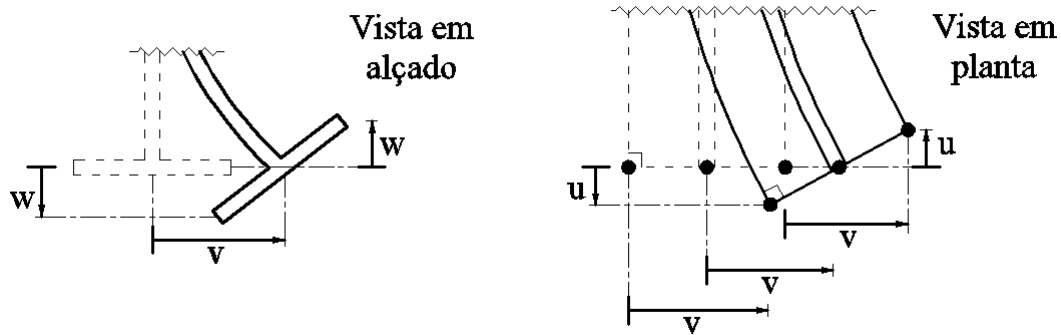


Figura 2.16: Modo de deformação do banzo inferior

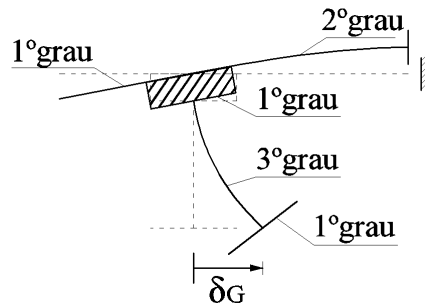


Figura 2.17: Modo de deformação da secção transversal no seu plano e grau das funções \bar{w} em cada parede

secção (neste caso só ocorrem no banzo inferior, razão pela qual é introduzido um apoio que permite o deslocamento lateral na alma como mostra a figura 2.15), o que permite determinar os deslocamentos w e caracterizar completamente o modo distorcional (ver figuras 2.16 e 2.17). Para o efeito foi utilizado o Método das Forças, o qual conduziu aos deslocamentos apresentados na tabela 2.1, em função dos parâmetros geométricos apresentados nas figuras 2.14 e 2.15. Nestas expressões, $D_{fw} = \frac{Ea t_w^3}{12(1-\nu_a^2)}$ é a rigidez de flexão da alma e D_{fc} é a rigidez de flexão da laje de betão, que varia consoante esta se encontre fendilhada ou não. Admite-se que a laje encontra-se fendilhada nas duas direcções na zona de momentos negativos (tal como no modelo do EC4) e não fendilhada na zona de momentos positivos. No caso não fendilhado a rigidez de flexão transversal é dada por $D_{fc} = \frac{E_c h_c^3}{12(1-\nu_c^2)}$ e, no caso fendilhado, a rigidez é calculada desprezando o betão à tracção mas acrescentando a contribuição da armadura à tracção. Na figura 2.17 representa-se o modo distorcional e indicam-se os graus das funções w em cada parede.

O modo distorcional normaliza-se com o objectivo de obter um deslocamento unitário v

Tabela 2.1: Deslocamentos nodais do modo distorcional

δ_C	$\frac{ab_2^2}{2D_{fc}}$
δ_G	$\frac{a^2b_2}{D_{fc}} + \frac{a_2^3}{3D_{fw}}$
θ_B	$\frac{ab_2}{D_{fc}}$
θ_G	$\frac{ab_2}{D_{fc}} + \frac{a_2^2}{2D_{fw}}$

no banzo inferior, o que conduz a

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_f}{2} - y \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{w}} = \begin{Bmatrix} \frac{\theta_B y - \theta_B b_1}{\delta_G} \\ \frac{\theta_B y}{\delta_G} - \frac{k_3 y^2}{b_2^2 \delta_G} \\ \frac{\theta_B y}{\delta_G} - \frac{\theta_B b_f}{2\delta_G} \\ \frac{\theta_B y}{\delta_G} - \frac{k_2 y^2}{a_2^2 \delta_G} + \frac{k_1 y^3}{a_2^3 \delta_G} \\ \left(\frac{y}{\delta_G} - \frac{b_f}{2\delta_G} \right) \left(\frac{\theta_B}{\delta_G} - \frac{2k_2 a_2}{a_2^2 \delta_G} + \frac{3k_1 a_2^2}{a_2^3 \delta_G} \right) \end{Bmatrix}, \quad (2.35)$$

em que a componente i de cada vector se refere à parede i , δ_C , δ_G , θ_B e θ_G , são apresentados na tabela 2.1 e as constantes k_1 , k_2 e k_3 são parâmetros geométricos dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} k_1 &= \theta_B a_2 - 2\delta_G + a_2 \theta_G, \\ k_2 &= 2\theta_B a_2 - 3\delta_G + a_2 \theta_G, \\ k_3 &= \theta_B b_2 - \delta_C. \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.4.3.2 Constantes de rigidez

As constantes de rigidez são determinadas tendo em conta as expressões (2.33) e o modo de deformação determinado na secção anterior (expressão (2.35)). As expressões obtidas para cada rigidez foram desenvolvidas por intermédio do programa de cálculo *Maple 13*.

A constante C_1 é dada por

$$C_1 = E_a \frac{t_f b_f^3}{12}. \quad (2.37)$$

e corresponde à rigidez de empenamento do banzo inferior quando este desloca uma unidade na horizontal (ver figura 2.16).

A constante C_2 é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} C_2 &= D_{fc}^{xx} \left[\frac{b_1^3 \theta_B^2}{3\delta_G^2} + \frac{k_3^2 b_2}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3 b_2^2}{2\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ &+ D_{fw} \left[\frac{k_1^2 h_w^7}{7\delta_G^2 a_2^6} - \frac{k_2 k_1 h_w^6}{3\delta_G^2 a_2^5} + \left(\frac{2\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{k_2^2}{a_2^4} \right) \frac{h_w^5}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_2 h_w^4}{2a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 h_w^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ &+ D_{ff} \left[\frac{b_f^3}{12} \left(\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que $D_{ff} = \frac{E_a t_f^3}{12(1-\nu_a^2)}$ é a rigidez de flexão dos banzos e D_{fc}^{xx} é a rigidez de flexão longitudinal da laje de betão. No caso não fendilhado tem-se $D_{fc}^{xx} = \frac{E_c h_c^3}{12(1-\nu_c^2)}$ e no caso fendilhado

esta rigidez pode ser desprezada, dado que todo o betão na espessura da laje se encontra traccionado na direcção longitudinal e, portanto, apenas a armadura contribui para a rigidez de flexão.

Em relação à rigidez de flexão transversal, esta é dada pela constante B e está associada à rigidez de flexão transversal da laje e da alma do perfil apenas. A expressão (2.33), de acordo com o modo de deformação (2.35), conduz a

$$B = D_{fc} \frac{4k_3^2}{b_2^3 \delta_G^2} + D_{fw} \left(\frac{12k_1^2 h_w^3}{a_2^6 \delta_G^2} - \frac{12k_2 k_1 h_w^2}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{4k_2^2 h_w}{a_2^4 \delta_G^2} \right). \quad (2.39)$$

Há que ter em atenção que, conforme foi já referido, a rigidez de flexão transversal da laje D_{fc} varia consoante esta se encontra fendilhada ou não.

Em relação à rigidez de torção D_1 , tem-se

$$\begin{aligned} D_1 = & \frac{Eh_c^3}{6} \left[\frac{b_1 \theta_B^2}{\delta_G^2} + \frac{4k_3^2}{3b_2 \delta_G^2} - \frac{2\theta_B k_3}{\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2}{\delta_G^2} \right] + \\ & + G_a \frac{t_w^3 h_w}{3} \left[\frac{9k_1^2 h_w^4}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{3k_2 k_1 h_w^3}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^2}{3\delta_G^2} \left(\frac{6\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{4k_2^2}{a_2^4} \right) - \frac{2\theta_B k_2 h_w}{a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2}{\delta_G^2} \right] + \\ & + G_a \frac{t_f^3 b_f}{3} \left[\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right]^2, \end{aligned} \quad (2.40)$$

as parcelas de $\frac{Eh_c^3}{6}$, podem ser desprezadas quando se considera que a laje está fendilhada. $G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)}$ é o módulo de distorção do aço estrutural.

Por fim, o termo de acoplamento por efeito de Poisson, D_2 , é dado por

$$\begin{aligned} D_2 = & \nu_{xx} D_{fc}^{xx} \left(\frac{2k_3^2}{3b_2 \delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3}{\delta_G^2} \right) + \\ & + \nu_a D_{fw} \left[\frac{6k_1^2 h_w^5}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{2k_2 k_1 h_w^4}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^3}{3} \left(\frac{2k_2^2}{a_2^4 \delta_G^2} + \frac{6k_1 \theta_B}{a_2^3 \delta_G^2} \right) - \frac{\theta_B k_2 h_w^2}{a_2^2 \delta_G^2} \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

em que $\nu_{xx} = \nu_a$ no caso fendilhado $\nu_{xx} = \nu_c$ no caso não fendilhado. Como é de esperar, mais uma vez, a primeira parcela tem uma contribuição reduzida caso o betão esteja fendilhado.

2.4.3.3 Carga de bifurcação — viga simplesmente apoiada

Na subsecção anterior ficou por definir a constante X da expressão (2.33), que tem em conta os efeitos geometricamente não-lineares. Esta depende da distribuição de tensões σ_{xx}^M ao longo da viga, as quais por sua vez dependem da distribuição de momentos flectores na viga. Para uma viga simplesmente apoiada sujeita a momento negativo uniforme — caso de referência —, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli e desprezando o betão à tracção, a distribuição de tensões é a representada na figura 2.18 e as tensões são dadas por

$$\sigma_{xx}^M = \frac{Md}{I}, \quad (2.42)$$

em que I é o momento de inércia da secção transversal mista em relação à linha neutra e d representa a distância à linha neutra que, tendo em conta a figura 2.18, é dada para cada

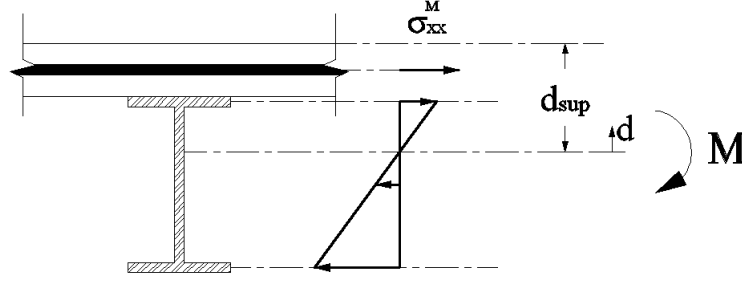


Figura 2.18: Representação do diagrama de extensões da secção transversal mista, assumindo a fendilhação do betão

parede por

$$d = \left\{ \begin{array}{c} d_{sup} - \frac{h_c}{2} \\ d_{sup} - \frac{h_c}{2} \\ d_{sup} - \frac{h_c}{2} - a_1 \\ d_{sup} - \frac{h_c}{2} - a_1 - y \\ -a + d_{sup} - \frac{h_c}{2} \end{array} \right\}. \quad (2.43)$$

Neste caso de referência é possível obter uma expressão analítica para o momento de bifurcação (M_{cr}). De facto, a solução exacta da equação diferencial (2.34) é $\Delta\phi = \bar{\phi} \sin(n\pi x/L)$, onde $\bar{\phi}$ é a amplitude e n é o número de semi-ondas. Assim sendo, pode-se transformar a equação de bifurcação de forma a obter (Gonçalves e Camotim, 2010)

$$\begin{aligned} C\bar{\phi} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \sin \frac{n\pi x}{L} + D\bar{\phi} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} + B\bar{\phi} \sin \frac{n\pi x}{L} + \lambda X\bar{\phi} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + D \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + B + \lambda X \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda = -\frac{C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + D \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + B}{X \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} = -\frac{C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + D + B \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2}{X} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda = \frac{M_{cr}}{M} = -\frac{C \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + D + B \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2}{X}, & \end{aligned} \quad (2.44)$$

e o momento crítico mínimo corresponde a (Gonçalves e Camotim, 2010),

$$\frac{M_{cr}}{M} = -\frac{D + 2\sqrt{BC}}{X}. \quad (2.45)$$

e comprimento de encurvadura crítico é dado por (Gonçalves e Camotim, 2010),

$$L_{cr} = n\pi \sqrt[4]{C/B} \quad (2.46)$$

A figura 2.19 representa, qualitativamente, a variação do momento crítico com o vão da viga mista, obtido com (2.44), observando-se um comportamento do tipo “placa” onde o número de semi-ondas do modo crítico aumenta com o vão (ver figura 2.20).

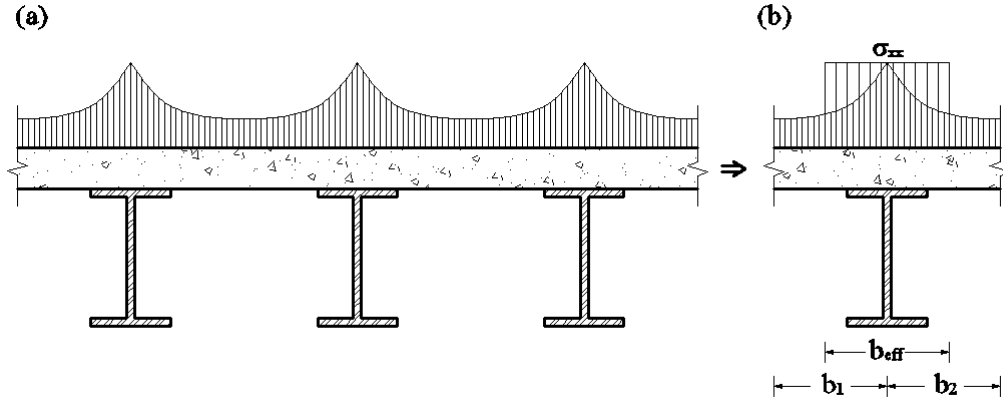


Figura 2.21: (a) Distribuição de tensões longitudinais no banzo de betão devida ao efeito de *shear lag*; (b) Distribuição uniforme de tensões longitudinais na largura efectiva, b_{eff}

2.4.3.4 Carga de bifurcação — viga contínua sujeita a carga distribuída

No caso de se ter uma viga contínua sujeita a uma carga distribuída, a aplicação do método não é tão imediata, devido à existência de uma zona de momentos flectores positivos e uma zona de momentos flectores negativos. Este aspecto tem de ser tido em conta no cálculo das constantes C_1 , C_2 , B , D_1 , D_2 e X , as quais vão diferir para a zona de momentos positivos, em que a laje de betão não se encontra fendilhada, e para a zona de momentos negativos, em que a laje de betão se encontra fendilhada. Note-se que a constante X varia em função do valor (e não só do sinal) do momento aplicado, em virtude de depender da distribuição de tensões normais longitudinais.

Numa viga contínua sujeita à flexão simples ocorre uma distribuição não uniforme de tensões normais longitudinais na laje de betão resultante da deformação por corte, um fenómeno que é designado por *shear lag* (Calado e Santos, 2010). Para ter em conta este fenómeno, recorre-se ao conceito de “largura efectiva” (reduzida) do banzo de betão colaborante com a secção mista, b_{eff} , de modo a poder admitir uma distribuição uniforme de tensões longitudinais (ver figura 2.21). Esta largura efectiva é calculada de acordo com o EC4 (CEN 2004), pela seguinte expressão

$$b_{eff} = b_0 + \sum b_{ei}, \quad (2.47)$$

em que b_0 é a distância entre os centros dos conectores extremos e b_{ei} é o valor da largura efectiva do banzo de betão de cada lado da alma, considerado igual a $L_e/8$. O vão equivalente L_e deverá ser considerado igual à distância aproximada entre pontos de momento flector nulo. Estima-se então uma largura efectiva do banzo de betão para a zona de momentos negativos e para a zona de momentos positivos.

O cálculo de σ_{xx}^M é feito do mesmo modo que para o caso apresentado na secção 2.4.3.3, com a diferença que tem de ser calculada para a zona de momentos positivos e para a zona de momentos negativos.

Na ausência da solução exacta, para determinar o valor do momento crítico, resolve-se a

equação integral (2.30), efectuando a seguinte aproximação

$$\delta\phi = \boldsymbol{\psi}\delta\mathbf{d}, \quad (2.48)$$

$$\Delta\phi = \boldsymbol{\psi}\Delta\mathbf{d}, \quad (2.49)$$

em que $\boldsymbol{\psi}$ é um vector linha contendo as funções de aproximação cinematicamente admissíveis (de acordo com o Método de Rayleigh-Ritz) e \mathbf{d} é o vector das incógnitas (amplitudes das funções de aproximação). Sendo assim, as equações (2.31) e (2.32) escrevem-se da seguinte forma

$$\lambda \int_L X \delta\phi_{,x} \Delta\phi_{,x} dx = \lambda \delta\mathbf{d}^t \left(\int_L X \boldsymbol{\psi}_{,x}^t \boldsymbol{\psi}_{,x} dx \right) \Delta\mathbf{d} \quad (2.50)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_L \left[C \delta\phi_{,xx} \Delta\phi_{,xx} + D_1 \delta\phi_{,x} \Delta\phi_{,x} + B \delta\phi \Delta\phi + D_2 (\delta\phi \Delta\phi_{,xx} + \delta\phi_{,xx} \Delta\phi) \right] dx = \\ & = \delta\mathbf{d}^t \left(\int_L \left[C \boldsymbol{\psi}_{,xx}^t \boldsymbol{\psi}_{,xx} + D_1 \boldsymbol{\psi}_{,x}^t \boldsymbol{\psi}_{,x} + B \boldsymbol{\psi}^t \boldsymbol{\psi} + D_2 (\boldsymbol{\psi}^t \boldsymbol{\psi}_{,xx} + \boldsymbol{\psi}_{,xx}^t \boldsymbol{\psi}) \right] dx \right) \Delta\mathbf{d}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

O sistema de equações é obtido fazendo $\delta\mathbf{d} = \mathbf{I}$ (matriz identidade), surgindo assim o problema de valores e vectores próprios, o qual se escreve

$$(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{G})\Delta\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (2.52)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_L \left[C \boldsymbol{\psi}_{,xx}^t \boldsymbol{\psi}_{,xx} + D_1 \boldsymbol{\psi}_{,x}^t \boldsymbol{\psi}_{,x} + B \boldsymbol{\psi}^t \boldsymbol{\psi} + D_2 (\boldsymbol{\psi}^t \boldsymbol{\psi}_{,xx} + \boldsymbol{\psi}_{,xx}^t \boldsymbol{\psi}) \right] dx, \\ \mathbf{G} &= \int_L X \boldsymbol{\psi}_{,x}^t \boldsymbol{\psi}_{,x} dx. \end{aligned} \quad (2.53)$$

As soluções não triviais de (2.52) são obtidas através de

$$\det(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{G}) = 0, \quad (2.54)$$

onde os valores críticos do parâmetro de carga λ são os valores próprios e os modos de instabilidade $\Delta\mathbf{d}$ são os vectores próprios.

Conforme foi já referido, as funções contidas em $\boldsymbol{\psi}$ são cinematicamente e estaticamente admissíveis. Considera-se o banzo inferior como uma coluna apoiada-encastada, em que se admite que o apoio de continuidade restringe o deslocamento e a rotação do banzo inferior (em relação a um eixo vertical) e que o apoio de extremidade não permite o deslocamento mas permite a rotação e o momento no apoio é nulo ($v'' = 0$). Optou-se pela família de funções, $\psi_n = \sin(k_n x) - k_n x \cos(k_n L)$, as quais se representam na figura 2.22, em que L é o vão da viga e k_n é uma constante que depende do número de ondas da função, calculada de forma a respeitar a equação $k_n L - \tan(k_n L) = 0$ (Reis e Camotim, 2001).

2.5 Comparação dos métodos

Nesta secção procede-se à comparação analítica dos dois métodos apresentados nas secções 2.2 e 2.3 com o método desenvolvido, baseado na GBT (secção 2.4). Efectua-se a comparação

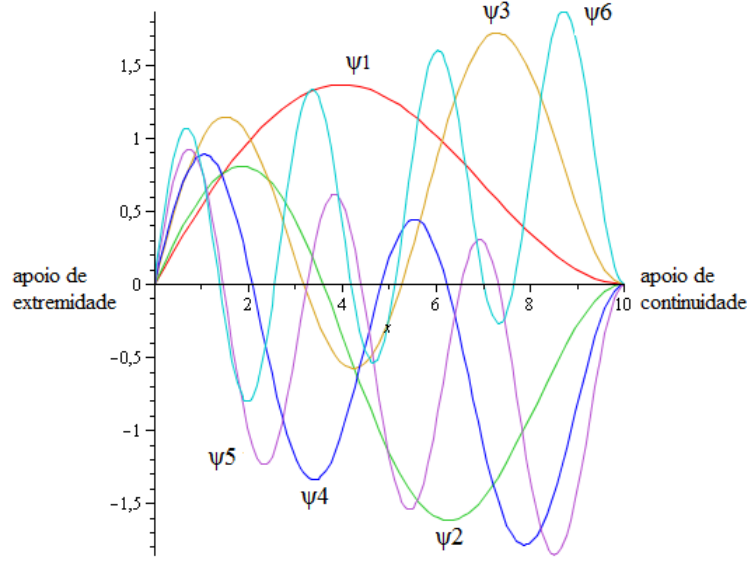


Figura 2.22: Funções de aproximação, ψ , para uma viga contínua com vão de 10 m

das expressões do momento crítico fornecidas por cada método e dos termos intervenientes nessas expressões. Nestas comparações não se consideram as constantes C_2 e D_2 da GBT, visto que, para o caso em que a secção mista se encontra sujeita a momento flector negativo, estas apresentam valores muito reduzidos. Assim, na secção 2.5.1 compara-se o método da GBT com o do EC4 (ENV), enquanto que na secção 2.5.2 a comparação é efectuada com o método de Hanswille.

2.5.1 Método do EC4 vs. GBT

Neste caso compara-se a expressão do momento crítico do EC4, (2.1), com a expressão da GBT (2.44).

O termo GI_{at} (2.2) representa a rigidez de torção de St. Venant da secção de aço estrutural e, portanto, não contabiliza a distorção da secção transversal. Ao contrário, a GBT considera consistentemente a distorção da secção através do termo D_1 , o qual é dado por (2.40).

Pode mostrar-se que o termo k_s (2.5) relaciona-se com a constante B de (2.39) de acordo com

$$k_s = Bh_s^2, \quad (2.55)$$

desde que se despreze a influência do troço rígido ($a_1 = 0$) no cálculo do B . De facto, tal como referido na secção 2.2, a rigidez considerada no método do EC4 corresponde a um modo distorcional associado a uma rotação da corda da alma unitária (recordar figura 2.3), o que é consistente com a rigidez de torção GI_{at} . No caso da GBT, o modo de deformação foi escalado para fornecer um deslocamento do banzo inferior unitário ($\delta_G = 1$), razão pela qual ocorre esta diferença (o factor de escala é h_s). Caso se tivesse considerado exactamente a mesma amplitude do modo, obter-se-ia $k_s = B$ (desde que se considerasse também $a_1 = 0$).

O termo $E_a I_{afz}$, dado por (2.6), corresponde exactamente à constante C_1 (2.37), ou seja, ambas correspondem à rigidez de empenamento do banzo inferior do perfil estrutural, quando este se desloca uma unidade na horizontal (ver figura 2.16). Quer isto dizer que o método

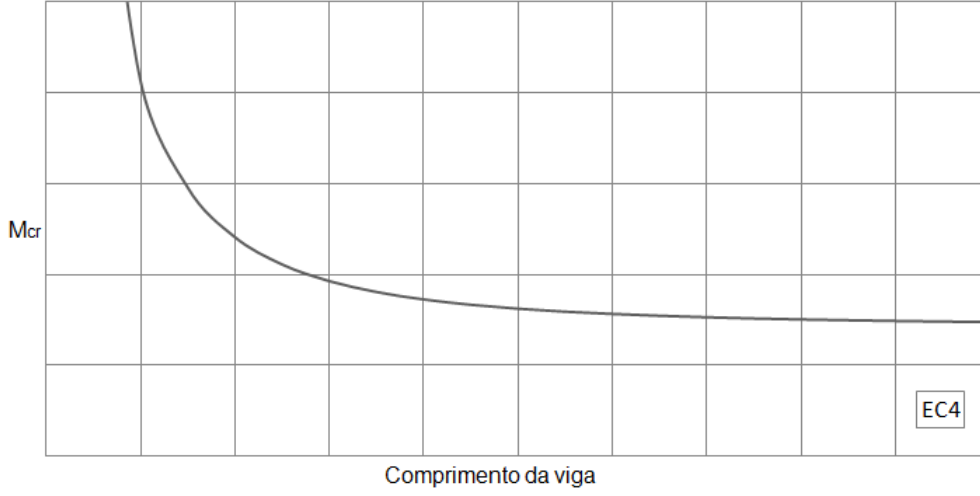


Figura 2.23: Variação do momento crítico com o vão de acordo com o método do EC4 (ENV).

do EC4 é aparentemente inconsistente neste termo, dado que os restantes estão associados à rotação unitária da alma, o que não corresponde em geral a um deslocamento unitário do banzo inferior e, portanto, deveria conduzir a $E_a I_{afz} / h_s^2$ em vez de $E_a I_{afz}$.

Salienta-se ainda que a expressão do momento crítico do EC4 não está conceptualmente correcta, visto que o momento crítico decresce sempre com o vão, atingindo o seu valor mínimo para um vão infinito (ver figura 2.23), o que não corresponde ao comportamento tipo “placa” da figura 2.19, tal como previsto pela GBT.

2.5.2 Método de Hanswille vs. GBT

Para fazer um estudo comparativo entre o método de Hanswille e a GBT, começou-se por desenvolver a expressão (2.16). Substituindo (2.18) em (2.17), que por sua vez foi substituída na expressão de M_{cr} , obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
 M_{cr} &= \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 E I_{WD}}{\frac{1}{n^2 + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{C_\phi L^4}{E I_{WD} \pi^2}\right)} L^2} + G I_T \right] = \\
 &= \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 E I_{WD}}{\frac{L^2}{n^2} + \frac{n^2 E I_{WD} \pi^4}{C_\phi L^2}} + G I_T \right] = \\
 &= \frac{1}{k_z} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E I_{WD} + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 C_\phi + G I_T \right]. \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Esta expressão é muito semelhante à da GBT (2.44), ou seja,

$$M_{cr}^{GBT} = -\frac{M}{X} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C + \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 B + D \right]. \quad (2.57)$$

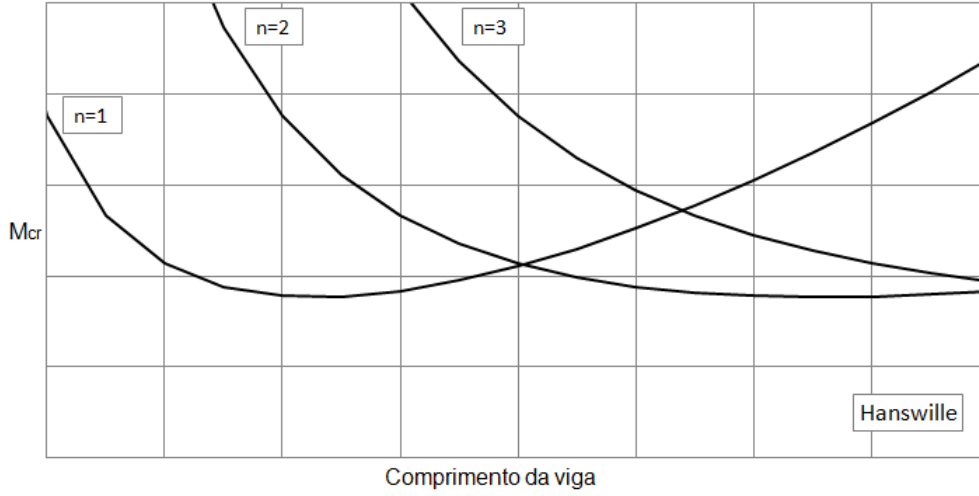


Figura 2.24: Variação do momento crítico com o vão de acordo com o método de Hanswille.

Assim, EI_{wD} corresponde a C_1 (e não a C , mas a contribuição de C_2 é reduzida), C_ϕ^2 corresponde a B e GI_T corresponde a D_1 (e não a D , mas a contribuição de D_2 também é reduzida). Tal como no método do EC4, o modo de deformação considerado por Hanswille está associado a uma rotação unitária da corda da alma e, por isso, estes termos relacionam-se com os da GBT pelo factor de escala h_s^2 . Por outro lado, tal como no método do EC4, Hanswille considera a rigidez de torção de St. Venant do perfil, o que também constitui uma aproximação.

Na figura 2.24 representa-se, qualitativamente, o andamento do momento crítico fornecido pelo método de Hanswille com o vão. Observa-se um andamento idêntico ao da GBT, o que leva a afirmar que, conceptualmente, a expressão de Hanswille é superior à do método do EC4.

²Recorde-se que este termo é igual a k_s .

Capítulo 3

Exemplos ilustrativos

3.1 Introdução

Neste capítulo procede-se à aplicação e comparação dos métodos apresentados no Capítulo 2. Pretende-se explicitar melhor os métodos referidos e de certa forma validar e comparar o método da teoria generalizada de vigas (GBT) com os métodos do EC4 e de Hanswille. Começa-se por apresentar um exemplo aplicado à viga de Gonçalves e Camotim (2010), com o objectivo de validar o método da teoria generalizada de vigas (GBT). Seguidamente são apresentados dois exemplos comparativos dos vários métodos apresentados utilizando a viga de Calado e Santos (2010): (i) comparam-se os valores dos momentos críticos elástico, M_{cr} , calculados pelos diferentes métodos, para o caso em que se tem uma viga mista simplesmente apoiada e sujeita a momento negativo e uniforme; (ii) comparam-se os valores dos momentos críticos elásticos, M_{cr} , também calculados pelos diferentes métodos, no apoio interno de uma viga mista contínua sujeita a um carregamento uniforme ao longo do vão, ou seja, para um diagrama de momentos flectores variável. Todos os exemplos apresentados seguidamente foram calculados com o auxílio do programa de cálculo *Maple 13*, onde se implementaram as rotinas devidamente programadas para a aplicação de cada método para o cálculo do momento crítico de encurvadura lateral.

3.2 Exemplo 1: viga de Gonçalves e Camotim (2010)

Este exemplo tem como objectivo a validação do método baseado na GBT, apresentado no capítulo anterior. A validação do método passou por duas fases: (i) fez-se uma verificação dos deslocamentos (w) dos nós da secção transversal por comparação com os valores obtidos através do programa de elementos finitos *SAP2000* (SAP2000 Inc., 2009); (ii) fez-se uma comparação dos momentos críticos obtidos com os valores obtidos por Gonçalves e Camotim (2010).

Os autores referidos estudaram, entre outros, o modo de instabilidade distorcional em pontes mistas sujeitas a momento negativo uniforme (caso de referência), utilizando a GBT, em que a secção transversal mista é idêntica à utilizada no desenvolvimento do método (baseado na GBT) apresentado no presente trabalho (figuras 2.14 e 2.15).

Neste exemplo consideraram-se os dados utilizados por Gonçalves e Camotim (2010). A classe de betão utilizada foi um C50/60, com um módulo de elasticidade $E_c = 37$ GPa e um coeficiente de Poisson $\nu_c = 0,1$. O aço estrutural utilizado apresenta um módulo de elasticidade $E_a = 37$ GPa, e um coeficiente de Poisson $\nu_a = 0,3$. Em relação à armadura ordinária,

Tabela 3.1: Dados para a geometria da secção mista

b_1	1,5 (m)
b_2	2 (m)
h_c	0,2 (m)
h_w	0,8 (m)
t_w	0,15 (m)
t_f	0,03 (m)
b_f	0,3 (m)
a_1	0,115 (m)
a_2	0,83 (m)

considerou-se que esta se situa na linha média da secção de betão em que a sua área é de $7,854 \text{ cm}^2/\text{m}$ e apresenta um módulo de elasticidade $E_s = 200 \text{ GPa}$. Em relação à geometria da secção, os dados são os apresentados na tabela 3.1, tendo em conta as figuras 2.14 e 2.15.

Tendo em conta os dados apresentados na tabela 3.1 e as expressões dos deslocamentos e rotações dos nós principais, apresentados na tabela 2.1, o modo de deformação da secção transversal (2.35) é dado por

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,15 - y \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{w}} &= \begin{Bmatrix} 0,02521563710y - 0,03782345565 \\ -0,006303909275y^2 + 0,02521563710y \\ 0,02521563710y - 0,003782345565 \\ -0,8637573237y^3 + 2,138127783y^2 + 0,02521563710y \\ -0,2684070746 + 1,789380497y \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Como foi já referido, para efeitos de validação, recorreu-se ao programa de elementos finitos *SAP2000*¹ para obter os valores de deslocamentos w dos nós da secção, os quais são comparados com os obtidos a partir de (3.1) na Tabela 3.2. Pode-se verificar que os valores são praticamente idênticos, podendo admitir-se que as componentes do modo de deformação estão correctamente calculadas. Na figura 3.1 representa-se o modo de deformação da secção.

Os valores dos momentos críticos foram obtidos a partir de (2.44) e foram comparados com os obtidos por Gonçalves e Camotim (2010). Para tal, é necessário referir que se considerou que a laje se encontra fendilhada na direcção longitudinal e não fendilhada na direcção transversal. Em relação à largura efectiva da laje de betão, considera-se ser igual à distância entre perfis metálicos, visto se tratar de uma viga mista simplesmente apoiada sujeita unicamente a momento flector negativo uniforme (não existe efeito de *shear lag*).

Na figura 3.2 apresenta-se um gráfico onde são comparados os valores de M_{cr} obtidos no presente trabalho e os de Gonçalves e Camotim (2010), em função do vão L . Na observação

¹Foi modelada a “estrutura” da secção transversal com elementos *frames* para cada parede (teve-se em conta o troço rígido, tal como na secção 2.4.3.1), e os apoios foram determinados de acordo com a figura 2.15. Assumiu-se que a laje não está fendilhada, (D_{fc}).

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

Tabela 3.2: Valores da componente w dos deslocamentos nodais do modo de deformação

Nó	Análítico (m)	Numérico (m)	Erro (%)
A	-0.0378	-0.0379	0.26
B	0	0	0
C	0.0252	0.0253	0.40
D	-0.0038	-0.0038	0
G	1	1	0
H	-0.2684	-0.2684	0

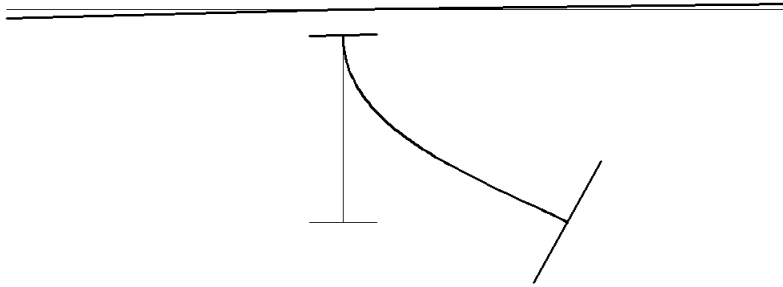


Figura 3.1: Representação do modo de distorção da secção transversal mista, à escala

do gráfico pode-se verificar que os valores são praticamente idênticos, sendo a maior diferença de 5,72 %. Foram também comparados os valores de momento crítico mínimo (obtidos para um vão $L = 8$ m, pela expressão (2.45)), em que se obteve no presente trabalho um valor de 4619.04 kNm, enquanto que Gonçalves e Camotim (2010) obtiveram um valor de 4608.23 kNm, ou seja, os valores apresentam uma diferença de apenas 0,23 %. Esta diferença nos valores obtidos explica-se pelo facto de Gonçalves e Camotim terem utilizado a distância entre linhas médias dos banzos do perfil I como o valor para a altura da alma ($a_2 = h_w$) e a distância entre a linha média da secção de betão e a linha média do banzo superior igual à metade da altura da secção de betão ($a_1 = h_c/2$), enquanto que no presente documento teve-se em conta essas dimensões mais correctamente, ou seja, o valor admitido para a altura da alma do perfil estrutural no presente trabalho acaba por ser ligeiramente inferior.

3.3 Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

Neste exemplo optou-se por estudar a viga do exemplo 7.2 do livro de Calado e Santos (2010). Os materiais utilizados neste exemplo foram: (i) betão da classe $C25/30$, com módulo de elasticidade $E_c = 31$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_c = 0,2$; (ii) aço da classe $S355$, com módulo de elasticidade $E_a = 210$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu_a = 0,3$; e (iii) armadura ordinária com aço da classe $A500$ com módulo de elasticidade $E_s = 210$ GPa e área de armadura distribuída $a_s = 11,31 \times 10^{-4}$ m²/m. Considera-se que a armadura situa-se na linha média da laje de betão. A geometria da secção transversal está representada na figura 3.3.

Foram considerados dois casos: (i) Caso 1 - em que se a viga é simplesmente apoiada e sujeita a um diagrama de momentos flectores negativos uniforme; (ii) Caso 2 - em que a viga

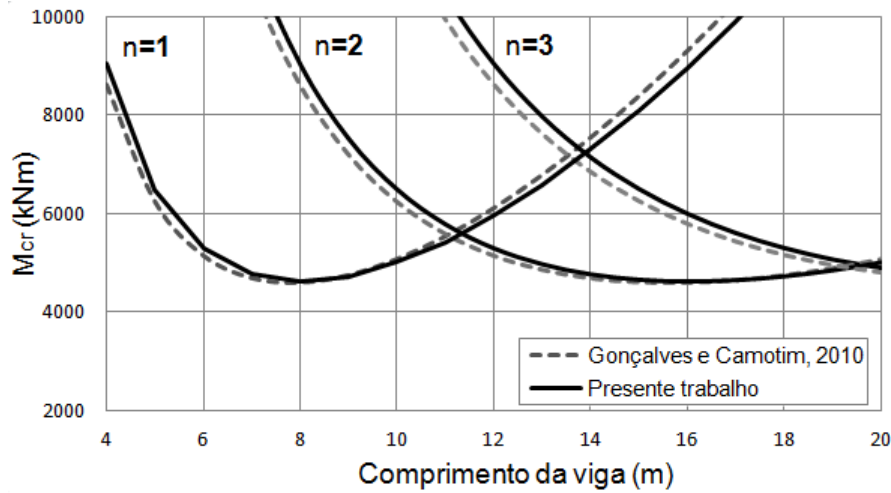


Figura 3.2: Comparação entre os resultados obtidos com a presente formulação e os obtidos por Gonçalves e Camotim (2010)

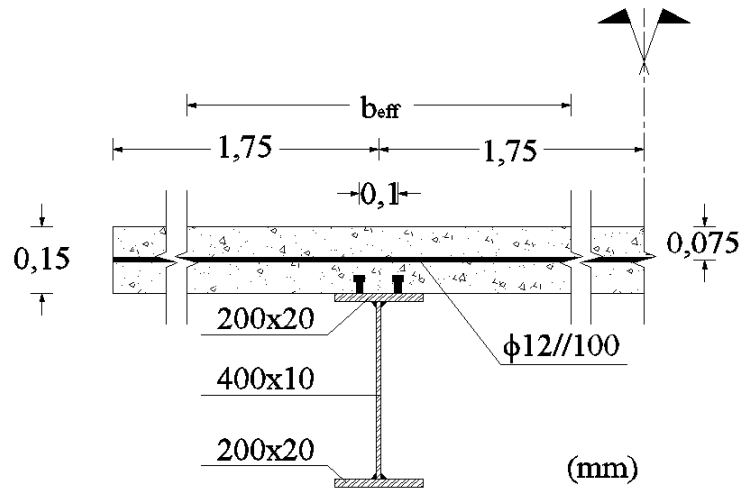


Figura 3.3: Geometria da seção da viga mista de Calado e Santos (2010)

é contínua e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído, ou seja, a viga está sujeita a um diagrama de momentos flectores variável.

3.3.1 Caso 1 — viga mista simplesmente apoiada

No caso 1 a viga encontra-se simplesmente apoiada e sujeita a um diagrama de momentos flectores negativos uniforme, como indica a figura 3.4. Nas seções seguintes apresentam-se os passos de cálculo para cada um dos métodos abordados neste trabalho. Para o caso em que o momento flector na viga é uniforme, ou seja, não existe deformação por corte, a largura efectiva b_{eff} da laje de betão é igual à distância entre perfis de aço estrutural a , ou seja, $b_{eff} = 3,5$ m.

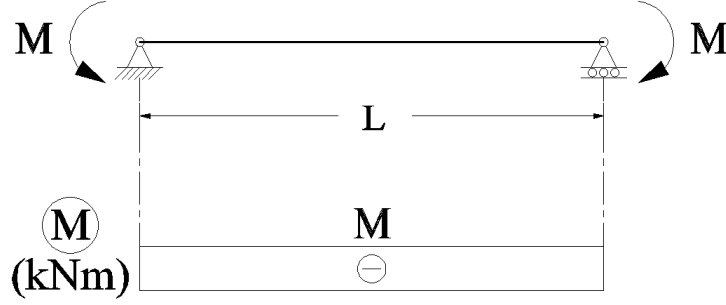


Figura 3.4: Viga mista simplesmente apoiada

3.3.1.1 Aplicação do método do EC4

Nesta secção aplica-se o método do EC4 (ENV), apresentado na secção 2.2.

Cálculo de C_4

Neste exemplo, como o momento a actuar na viga mista é uniforme, significa que $\psi = 1$, ou seja, recorrendo à tabela da figura 2.6, pode-se verificar que C_4 assume o valor de 6,20.

Cálculo de I_{at}

I_{at} é a constante de torção de St. Venant da secção de aço estrutural. Esta pode ser obtida pela expressão (2.2),

$$I_{at} = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3} (2b_f t_f^3 + h_w t_w^3) = 1,200 \times 10^{-6} \text{ m}^4. \quad (3.2)$$

Cálculo de I_{afz}

I_{afz} é o momento de inércia do banzo inferior da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia, ou seja, é dado pela expressão (2.6)

$$I_{afz} = \frac{b_f^3 t_f}{12} = 1,333 \times 10^{-5} \text{ m}^4. \quad (3.3)$$

Cálculo de k_1

k_1 representa a contribuição da laje para a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, que pode ser obtida pela expressão (2.3). No caso deste exemplo considera-se que a laje de betão está simplesmente apoiada em dois perfis de aço estrutural, pelo que o valor de α assume o valor de 2,0. O parâmetro a representa o afastamento dos perfis de aço, ou seja, $a = 3,5$ m. Para o cálculo da inércia fendilhada da laje por unidade de largura na direcção transversal, I_2 , é necessário calcular a posição do eixo neutro elástico da laje, considerando que o betão não resiste à tracção e que esta passará pelo centro de gravidade da secção homogeneizada (ver figura 3.5), o que fornece

$$a_s (z_e - d_s) = \frac{1}{n} \frac{(h_c - z_e)^2}{2} \Leftrightarrow z_e = 0,123 \text{ m}, \quad (3.4)$$

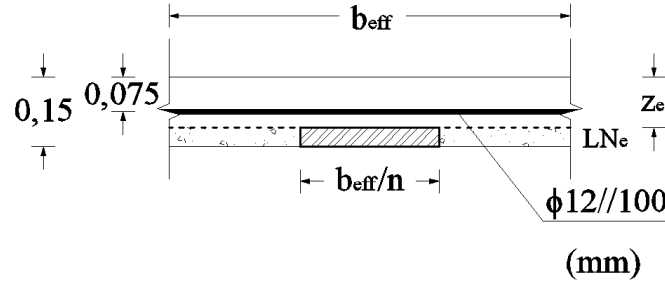


Figura 3.5: Secção fendilhada da laje de betão armado

em que n é o coeficiente de homogeneização determinado por E_a/E_c , sendo $n = 6,77$. h_c e d_s são, respectivamente, a altura da laje de betão e a posição de armadura. z_e é a posição da linha neutra (ver figura 3.5). A altura da laje de betão comprimida é então, $d_c = h_c - z_e = 0,027$ m. A inércia fendilhada I_2 pode então calcular-se a partir de

$$I_2 = a_s (z_e - d_s)^2 + \frac{\left(\frac{1}{n}d_c^3\right)}{12} + \frac{1}{n}d_c \left(\frac{d_c}{2}\right)^2 = 3,572 \times 10^{-6} \text{ m}^4/\text{m}, \quad (3.5)$$

o que conduz a

$$k_1 = \frac{\alpha E_a I_2}{a} = 428,64 \text{ kN/rad}. \quad (3.6)$$

Cálculo de k_2

k_2 representa a contribuição da alma para a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, que pode ser obtida pela expressão (2.4):

$$k_2 = \frac{E_a t_w^3}{4(1 - \nu_a^2) h_s} = 137,36 \text{ kN/rad}, \quad (3.7)$$

em que h_s é a distância entre os centros de corte dos banzos da secção de aço estrutural.

Cálculo de k_s

Para o cálculo de k_s utiliza-se a expressão (2.5). Este representa a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, que depende de k_1 e de k_2 , ou seja

$$k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 104,03 \text{ kN/rad}. \quad (3.8)$$

Cálculo de k_c

k_c é calculado pelas expressões (2.7) e (2.8), que têm em conta a secção de aço em I , bi-simétrica. Para tal é preciso calcular o momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de maior inércia

$$I_{ay} = \frac{t_w h_w^3}{12} + 2 \left[\frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(\frac{h_s}{2}\right)^2 \right] = 4,064 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.9)$$

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

o momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia

$$I_{az} = 2 \frac{t_f b_f^3}{12} + \frac{h_w t_w^3}{12} = 2,670 \times 10^{-5} \text{ m}^4, \quad (3.10)$$

a área da secção de aço estrutural

$$A_a = h_w t_w + 2 b_f t_f = 0,012 \text{ m}^2 = 120,00 \text{ cm}^2, \quad (3.11)$$

a área da armadura longitudinal na largura efectiva do banzo de betão

$$A_s = a_s b_{eff} = 0,003955 \text{ m}^2 = 39,55 \text{ cm}^2, \quad (3.12)$$

a área da secção mista equivalente, desprezando o betão,

$$A = A_a + A_s = 0,015955 \text{ m}^2 = 159,55 \text{ cm}^2, \quad (3.13)$$

e a posição da linha neutra da secção mista fendilhada, tendo em conta a área equivalente, A ,

$$A_s (y_{ln} - d_s) + (2 b_f t_f + h_w t_w) \left(-\frac{h_w}{2} - t_f - h_c + y_{ln} \right) = 0 \leftrightarrow y_{ln} = 0,297 \text{ m}. \quad (3.14)$$

Pode-se agora calcular a inércia referente ao eixo de maior inércia da secção mista fendilhada I_y , a qual é dada por

$$I_y = I_{ay} + A_a \left(h_c + t_f + \frac{h_w}{2} - y_{ln} \right)^2 + A_s (y_{ln} - d_s)^2 = 6,653 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.15)$$

a distância entre o baricentro da secção de aço estrutural e a meia espessura da laje

$$z_c = \frac{h_s}{2} + \frac{t_f}{2} + \frac{h_c}{2} = 0,295 \text{ m}, \quad (3.16)$$

e por fim, substituindo tudo nas expressões (2.8) e (2.7), obtêm-se os valores de $e = 0,463 \text{ m}$, $i_x^2 = 0,036 \text{ m}^2$ e $k_c = 1,159$.

Cálculo do momento crítico elástico M_{cr}

Por fim está-se em condições de aplicar a expressão (2.1) para calcular o momento crítico elástico. Por exemplo, para um vão L de 10 metros, obtém-se

$$M_{cr} = \frac{k_c C_4}{L} \sqrt{\left(G I_{at} + \frac{k_s L^2}{\pi^2} \right) E_a I_{afz}} = 1290,09 \text{ kNm}. \quad (3.17)$$

O valor de momento crítico elástico mínimo é dado, minimizando a expressão (2.1), ou seja, quando o vão é infinito ($L = \infty$), resultando na seguinte expressão e obtendo-se o seguinte valor

$$M_{cr,min} = k_c C_4 \sqrt{\frac{k_s}{\pi^2} E_a I_{afz}} = 1234,67 \text{ kNm}. \quad (3.18)$$

3.3.1.2 Aplicação do método de Hanswille

Nesta secção aplica-se o método de Hanswille, apresentado na secção 2.3 do capítulo 2.

Propriedades do perfil de aço estrutural

A área de aço estrutural do perfil é dada por

$$A_a = h_w t_w + 2 t_f b_f = 0,012 \text{ m}^2. \quad (3.19)$$

A inércia do perfil de aço estrutural segundo y é dada por

$$I_{ay} = \frac{t_w h_w^3}{12} + 2 \left[\frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] = 4,064 \times 10^{-4} \text{ m}^4. \quad (3.20)$$

A inércia do perfil de aço estrutural segundo z é dada por

$$I_{az} = 2 \frac{t_f b_f^3}{12} + \frac{h_w t_w^3}{12} = 2,670 \times 10^{-5} \text{ m}^4. \quad (3.21)$$

A constante de torção de St. Venant do perfil de aço estrutural é dada por

$$I_T = \frac{1}{3} (2 b_f t_f^3 + h_w t_w^3) = 1,200 \times 10^{-6} \text{ m}^4. \quad (3.22)$$

A constante de empenamento da secção de aço estrutural, em relação ao centro de corte M, é dada por (2.11)

$$I_{WM} = \frac{b_f^3 t_f}{24} h_s^2 = 1,176 \times 10^{-6} \text{ m}^6. \quad (3.23)$$

Propriedades da secção mista desprezando o betão

A área total de aço é dada pela seguinte expressão

$$A_{st} = A_a + A_s = 0,015955 \text{ m}^2 = 159,55 \text{ cm}^2, \quad (3.24)$$

em que $A_s = a_s b_{eff} = 0,003955 \text{ m}^2 = 39,55 \text{ cm}^2$. A distância entre a posição da armadura ordinária e o centro de massa do perfil metálico (recordar a figura 2.8), é dada por

$$a_{st} = \frac{h_w}{2} + t_f + \frac{h_c}{2} = 0,295 \text{ m}. \quad (3.25)$$

A inércia da secção mista segundo y , desprezando o betão, será

$$I_{st,y} = I_{ay} + \frac{A_a A_s}{A_{st}} a_{st}^2 = 6,653 \times 10^{-4} \text{ m}^4. \quad (3.26)$$

A posição do baricentro da secção mista, desprezando o betão fendilhado, é dada por

$$z_{st} = a_{st} \frac{A_a}{A_{st}} = 0,222 \text{ m}. \quad (3.27)$$

Finalmente, $z_{st,a}$ é a distância entre os baricentros do perfil e da secção mista desprezando o betão, ou seja, $z_{st,a} = z_{st} - a_{st} = 0,073 \text{ m}$.

Cálculo de k_z

O valor do factor k_z é dado pela expressão (2.14), ou seja

$$k_z = \left[\frac{(z_D + z_M)^2 + i_p^2}{z_e} + 2 z_D \right] \frac{I_{ay}}{I_{st,y}} = -0,210 \text{ m}, \quad (3.28)$$

em que $z_D = -h_s/2 = -0,210 \text{ m}$, $z_M = 0$ (no caso dos perfis I), $i_p^2 = (I_{ay} + I_{az})/A_a = 0,0361 \text{ m}^2$ e $z_e = -I_{ay}/(z_{st,a} A_a) = -0,463 \text{ m}$.

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

Cálculo dos factores de comprimento η_B e β_B

Os factores de comprimento η_B e β_B são dados respectivamente pelas expressões (2.18) e (2.17), e assumem os seguintes valores

$$\eta_B = \sqrt{\frac{C_\phi L^4}{EI_{WD}}} = 45,878 \quad (3.29)$$

e

$$\beta_B = \sqrt{\frac{1}{n^2 + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \left(\frac{\eta_B}{\pi}\right)^2}} = 0,326, \quad (3.30)$$

considerando um vão $L = 10$ m e $n = 2$ (duas semi-ondas). Finalmente, $C_\phi = k_s = 104,03$ kN/rad, de acordo com o que foi calculado na secção 3.3.1.1, e $I_{WD} = I_{WM} + z_D^2 I_{az} = 2,353 \times 10^{-6}$ m⁶.

Cálculo do momento crítico elástico

Tendo em conta os valores obtidos, está-se em condições de calcular o momento crítico pela expressão (2.16), proposta por Hanswille (2000) para o caso de viga simplesmente apoiada, ou seja,

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 EI_{WD}}{(\beta_B L)^2} + GI_T \right] = -1756,36 \text{ kNm}. \quad (3.31)$$

O momento crítico elástico é dado pela expressão (2.19), ou seja,

$$M_{cr,min} = \frac{1}{k_z} \left[2\sqrt{EI_{WD}C_\phi} + GI_T \right] = -1740,16 \text{ kNm}. \quad (3.32)$$

3.3.1.3 Aplicação do método da GBT

Tendo em conta o problema apresentado na secção 3.3.1, definem-se os parâmetros geométricos a_1 (distância entre a linha média da secção de betão e a linha média do banzo superior do perfil de aço estrutural), a_2 (distância entre as linhas médias dos banzos do perfil de aço estrutural) e a (distância entre a linha média da secção de betão e a linha média do banzo inferior), tal como representado na figura 2.15. Assim, estes parâmetros são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h_c}{2} + \frac{t_f}{2} = 0,085 \text{ m}, \\ a_2 &= h_w + 2\frac{t_f}{2} = 0,420 \text{ m}, \\ a &= a_1 + a_2 = 0,505 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Cálculo do modo de deformação

Para o cálculo do modo de deformação têm de se determinar os deslocamentos e rotações dos nós da secção, através das expressões da tabela 2.1, obtendo-se os seguintes valores

$$\begin{aligned}\delta_C &= \frac{ab_2^2}{2D_{fc}} = 0,0010302 \text{ m} \\ \delta_G &= \frac{a^2b_2}{D_{fc}} + \frac{a_2^3}{3D_{fw}} = 0,0018788 \text{ m} \\ \theta_B &= \frac{ab_2}{D_{fc}} = 0,0011774 \text{ rad} \\ \theta_G &= \frac{ab_2}{D_{fc}} + \frac{a_2^2}{2D_{fw}} = 0,0057638 \text{ rad},\end{aligned}\tag{3.34}$$

em que D_{fw} é a rigidez de flexão transversal da alma do perfil metálico, ou seja

$$D_{fw} = \frac{E_a t_w^2}{12(1 - \nu_a^2)} = 19,23 \text{ kN/m},\tag{3.35}$$

e D_{fc} é a rigidez de flexão transversal da laje de betão fendilhada, considerando a inércia da laje fendilhada, tal como no método do EC4 (expressão (3.5)), dada por

$$D_{fc} = E_a I_2 = 750,60 \text{ kN/m}.\tag{3.36}$$

Os parâmetros k_1 , k_2 e k_3 , dados pelas expressões (2.36), assumem os seguintes valores

$$k_1 = -8,423 \times 10^{-4}, \quad k_2 = -2,227 \times 10^{-3}, \quad k_3 = 1,030 \times 10^{-3}.\tag{3.37}$$

Tendo em conta os valores anteriores, está-se em condições de escrever o modo de deformação normalizado, segundo as expressões dadas em (2.35), ficando

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1-y \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{w}} &= \begin{Bmatrix} 0,6266778840y - 1,096686297 \\ -0,1790508239y^2 + 0,6266778840y \\ 0,6266778840y - 0,06266778840 \\ -6,050899940y^3 + 6,718222015y^2 + 0,6266778840y \\ -0,3067848130 + 3,067848130y \end{Bmatrix}.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Cálculo das constantes C_1 , C_2 , B , D_1 e D_2

As constantes de rigidez da GBT são:

- C_1 , que representa a constante de rigidez longitudinal dos termos de membrana, dada por (2.37)

$$C_1 = E_a \frac{t_f b_f^3}{12} = 2800;\tag{3.39}$$

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

- C_2 , a constante de rigidez longitudinal dos termos de flexão², dada por (2.38)

$$C_2 = D_{fc}^{xx} \left[\frac{b_1^3 \theta_B^2}{3\delta_G^2} + \frac{k_3^2 b_2}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3 b_2^2}{2\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2^3}{3\delta_G^2} \right] +$$

$$+ D_{fw} \left[\frac{k_1^2 h_w^7}{7\delta_G^2 a_2^6} - \frac{k_2 k_1 h_w^6}{3\delta_G^2 a_2^5} + \left(\frac{2\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{k_2^2}{a_2^4} \right) \frac{h_w^5}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_2 h_w^4}{2a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 h_w^3}{3\delta_G^2} \right] +$$

$$+ D_{ff} \left[\frac{b_f^3}{12} \left(\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right)^2 \right] = 2,81, \quad (3.40)$$

em que $D_{ff} = \frac{E_a t_f^3}{12(1-\nu_a^2)} = 153,85 \text{ kNm}$, é a rigidez de flexão dos banzos, D_{fw} , é a rigidez da alma do perfil de aço estrutural, calculada em (3.35) e $D_{fc}^{xx} \approx 0$ é a rigidez de flexão longitudinal da laje de betão fendilhada;

- B , a constante de rigidez de flexão transversal, dada por (2.39)

$$B = D_{fc} \frac{4k_3^2}{b_2^3 \delta_G^2} + D_{fw} \left(\frac{12k_1^2 h_w^3}{a_2^6 \delta_G^2} - \frac{12k_2 k_1 h_w^2}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{4k_2^2 h_w}{a_2^4 \delta_G^2} \right) = 596,98, \quad (3.41)$$

em que D_{fc} , é a rigidez de flexão transversal fendilhada, calculada em (3.36);

- D_1 , a constante de rigidez de torção³, dada por (2.40)

$$D_1 = G_a \frac{t_w^3 h_w}{3} \left[\frac{9k_1^2 h_w^4}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{3k_2 k_1 h_w^3}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^2}{3\delta_G^2} \left(\frac{6\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{4k_2^2}{a_2^4} \right) - \frac{2\theta_B k_2 h_w}{a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2}{\delta_G^2} \right] +$$

$$+ G_a \frac{t_f^3 b_f}{3} \left[\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right]^2 = 487,59, \quad (3.42)$$

em que $G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)} = 80,769 \text{ GPa}$, é o módulo de distorção do aço estrutural;

- D_2 , o termo de acoplamento por efeito de Poisson⁴, dado por (2.41)

$$D_2 = \nu_{xx} D_{fc}^{xx} \left(\frac{2k_3^2}{3b_2 \delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3}{\delta_G^2} \right) +$$

$$+ \nu_a D_{fw} \left[\frac{6k_1^2 h_w^5}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{2k_2 k_1 h_w^4}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^3}{3} \left(\frac{2k_2^2}{a_2^4 \delta_G^2} + \frac{6k_1 \theta_B}{a_2^3 \delta_G^2} \right) - \frac{\theta_B k_2 h_w^2}{a_2^2 \delta_G^2} \right] = 2,78, \quad (3.43)$$

com D_{fc}^{xx} e D_{fw} , calculados atrás.

Cálculo da constante X

Para o cálculo da constante X (2.33), é necessário determinar a distribuição de tensões longitudinais a actuar na viga, as quais são dadas por (2.42), sendo necessário para o efeito calcular a inércia da secção transversal mista em relação à linha neutra. Para o caso em que

²A rigidez longitudinal dos termos de flexão, para efeitos de cálculo, pode ser desprezada, quando se considera que a laje de betão está fendilhada.

³Desprezaram-se as parcelas que têm em conta a laje de betão, pois esta encontra-se fendilhada.

⁴Este termo pode ser desprezado quando se considera que a laje de betão está fendilhada.

Capítulo 3. Exemplos ilustrativos

o momento a actuar é negativo, a posição da linha neutra em relação à face superior da laje, d_{sup} , é dada por

$$\frac{a_s E_s}{E_a} (b_1 + b_2) \left(d_{sup} - \frac{h_c}{2} \right) + (2b_f t_f + h_w t_w) \left(-\frac{h_w}{2} - f_f - h_c + d_{sup} \right) = 0$$

$$\Rightarrow d_{sup} = 0,297 \text{ m.} \quad (3.44)$$

Tendo em conta a figura 2.18, a distância à linha neutra de cada parede, d , é dada por (2.43), ou seja

$$d = \begin{Bmatrix} 0,222 \\ 0,222 \\ 0,137 \\ 0,137 - y \\ -0,283 \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

Assim sendo, a inércia da secção mista em relação à linha neutra, I , obtém-se através do seguinte integral

$$I = \sum_{j=1}^5 \left[\frac{E_j}{E_a} t_j \int d^2 dy \right] = 6,597 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.46)$$

em que j designa o número de cada parede, E_j é o módulo de elasticidade de cada parede e t_j é a espessura de cada parede.

Tendo estes valores calculados está-se em condições de calcular o valor da constante geométrica X , dada por (2.33), ou seja

$$X = \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \sigma_{xx}^M t (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) dy \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \left(\frac{Md}{I} \right) t_j (\bar{v}_j^2 + \bar{w}_j^2) dy \right] = -1,650, \quad (3.47)$$

em que se considerou um momento de referência unitário $M = 1$ para a determinação das tensões.

Cálculo do momento crítico, M_{cr}

Finalmente, usando a expressão (2.44), o valor do momento crítico para $n = 2$ e $L = 10$ m vale

$$M_{cr} = -\frac{C \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + D + B \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2}{X} = 1879,25 \text{ kNm}, \quad (3.48)$$

sendo o valor do momento crítico elástico mínimo dado pela expressão (2.45)

$$\frac{M_{cr}}{M} = -\frac{D + 2\sqrt{BC}}{X} = 1860,09 \text{ kNm}. \quad (3.49)$$

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

Tabela 3.3: Rigidez de empenamento

EC4	Hanswille	GBT
$E_a I_{afz}$	$E_a I_{WD}/h_s^2$	C_1
2800	2801,75	2800

Tabela 3.4: Rigidez de flexão

EC4	Hanswille	GBT
k_s/h_s^2	C_ϕ/h_s^2	B
589,72	589,72	596,98

Tabela 3.5: Rigidez de torção

EC4	Hanswille	GBT
GI_{at}/h_s^2	GI_T/h_s^2	D_1
549,45	551,02	487,59

3.3.1.4 Discussão e comparação dos resultados

Começa-se por efectuar uma comparação qualitativa entre os valores das rigidezes fornecidos por cada método, os quais se indicam nas tabelas 3.3, 3.4 e 3.5:

- Em relação à rigidez de empenamento, regista-se uma coincidência quase perfeita, senda a pequena diferença obtida no método de Hanswille devida unicamente a erros de aproximação.
- Em relação à rigidez de flexão transversal, existe uma diferença de 1,22 % que se deve unicamente ao facto de, nos métodos do EC4 e de Hanswille, não se considerar o troço rígido a_1 para o cálculo da rigidez de flexão transversal, o qual é considerado na GBT. Se se calcular a rigidez B da GBT fazendo $a_1 = 0$ ($a = a_2$), obtém-se o valor $B = 589,76$ kN/m, que corresponde aos valores dos métodos do EC4 e de Hanswille.
- Em relação à rigidez de torção, verifica-se uma diferença que, tal como enunciado na secção 2.5, se deve ao facto de nos métodos do EC4 e de Hanswille se considerar que o perfil de aço estrutural roda como um corpo rígido, enquanto que no método da GBT a rigidez de torção é calculada consistentemente, tendo em conta a distorção da secção.

Para fazer uma comparação dos momentos críticos obtidos por cada método, apresenta-se na figura 3.6 um gráfico representando a variação dos momentos críticos calculados pelos diversos métodos em função do vão. Na análise do gráfico verifica-se, como seria de esperar, que todos os métodos apresentam um valor de momento crítico mínimo diferente de zero, devido à mobilização da rigidez de flexão transversal da secção. No entanto, o EC4 conduz aos menores valores, seguido do método de Hanswille e finalmente a GBT, que conduz aos valores mais elevados. Estes valores apresentam um erro de 31,95% entre o método do EC4 e GBT e de 6,13% entre o método de Hanswille e GBT. Note-se que o método de Hanswille conduz a resultados muito próximos do método da GBT, observando-se que as curvas relativas

a cada valor de n semi-onda registam valores mínimos para os mesmos valores de L , tal facto explica-se pela expressão (2.46), que nos diz que o comprimento crítico (L_{cr}) de encurvadura depende das constantes de rigidez de flexão transversal (B) e longitudinal (C), que como foi dito, são coerentes entre os métodos. Contudo note-se que Hanswille deveria apresentar valores superiores à GBT, porque apresenta uma rigidez de torção superior, contudo isto não se verifica pelo facto de $1/X$ (0,60607) ser superior que o factor $1/k_z^*$ (0,55742), em que $k_z^* = k_z/h_s^2$ (factor de escala do modo), ou seja, a diferença percentual entre os dois métodos, se fosse considerada a mesma rigidez de torção, seria a diferença percentual entre valores de $1/X$ e $1/k_z^*$, ou seja, 8,03%.

No gráfico da figura 3.7 apresentam-se os valores de M_{cr} obtidos pelos métodos em estudo, considerando um coeficiente de homogeneização $n = E_a/(E_c/2) = 13,55$, onde se assumiram de forma aproximada, os efeitos de deformação do betão a longo prazo segundo o EC4 (CEN 2004). Além dos valores apresentados na figura 3.7 calculou-se os valores de momentos críticos elásticos mínimos de cada método obtendo os seguintes valores, $M_{cr,min}^{GBT} = 1957,93$ kNm, $M_{cr,min}^{Hanswille} = 1698,93$ kNm e $M_{cr,min}^{EC4} = 1199,06$ kNm, que apresentam diferenças maiores em relação ao método da GBT (diferenças de 13,23%, para o método de Hanswille e de 38,75%, para o método do EC4).

Comparando os valores do $M_{cr,min}^{GBT}$ do caso da laje mais flexível e do caso atrás (3.49), verifica-se que os valores obtidos pela GBT apresentam agora um valor superior. De facto, com uma laje mais flexível, as constantes de rigidez obtidas são menores, contudo a constante X apresenta também valores menores e, por isso, dá valores de M_{cr} superiores. Da análise da constante X verificou-se que a tracção na laje dá um efeito estabilizante à viga, que faz com que o M_{cr} aumente pouco, face aos outros métodos que não consideram esse efeito. Neste caso, esse efeito é significativo, pois a largura efectiva da laje é muito grande por não haver efeito de *shear lag*. Talvez neste caso particular se devesse considerar um modo mais refinado, ou com mais modos de deformação na laje.

3.3.2 Caso 2 — viga mista contínua

O caso 2 diz respeito a uma viga mista contínua sujeita a uma carga de vão uniformemente distribuída, sendo a secção mista igual à do caso 1 (ver figura 3.3), ou seja, a secção mista do Exemplo 7.2 do livro de Calado e Santos (2010). A figura 3.8 ilustra a viga em causa, assim como o diagrama de momentos flectores, o qual foi retirado do Exemplo 6.1 do livro de Calado e Santos (2010), tendo sido obtido através de uma análise elástica linear não fendilhada com redistribuição de momentos, tendo o momento flector no apoio interno, M_B , o valor de -350 kNm. A equação que traduz o momento flector entre o ponto A e o ponto B é dada por $M = 160x - 20x^2$ (kNm).

Quando a viga mista está sujeita a um diagrama de momentos flectores variável, ocorre deformação por corte, logo é necessário considerar uma largura efectiva para a laje de betão. De acordo com o EC4 é suficiente considerar uma única largura efectiva para toda a zona de momento positivo (I) e outra para toda a zona de momento negativo (II), tal como foi referido na secção 2.4.3.4, a qual é dada pela expressão (2.47). O vão equivalente L_e , como referido, deverá ser considerado igual à distância entre os pontos de momento flector nulo, que para o caso da viga contínua de extremidade apresentada, está estipulado no EC4 ser igual a $0,85L$ para momentos positivos e $0,25(L + L)$ para a zona de momentos negativos. Os valores das

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

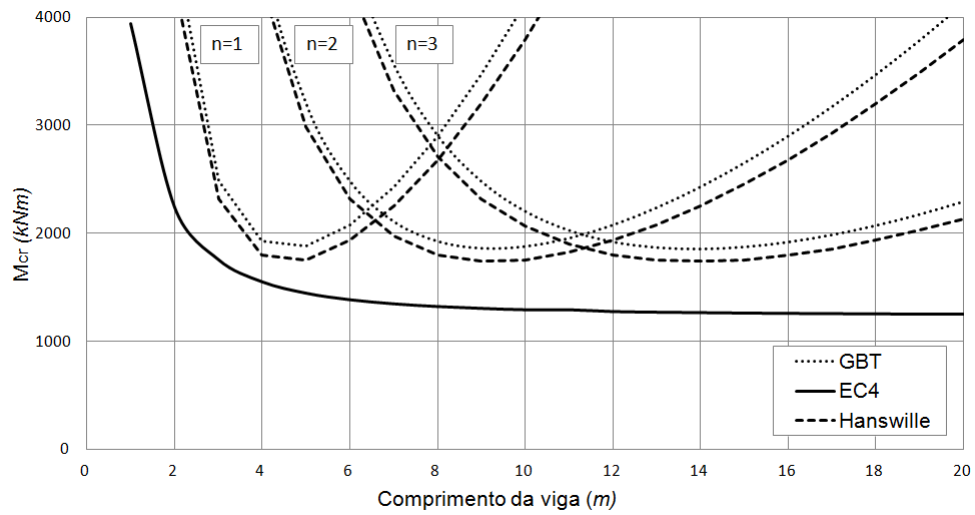


Figura 3.6: Gráfico comparativo dos vários métodos para uma viga simplesmente apoiada

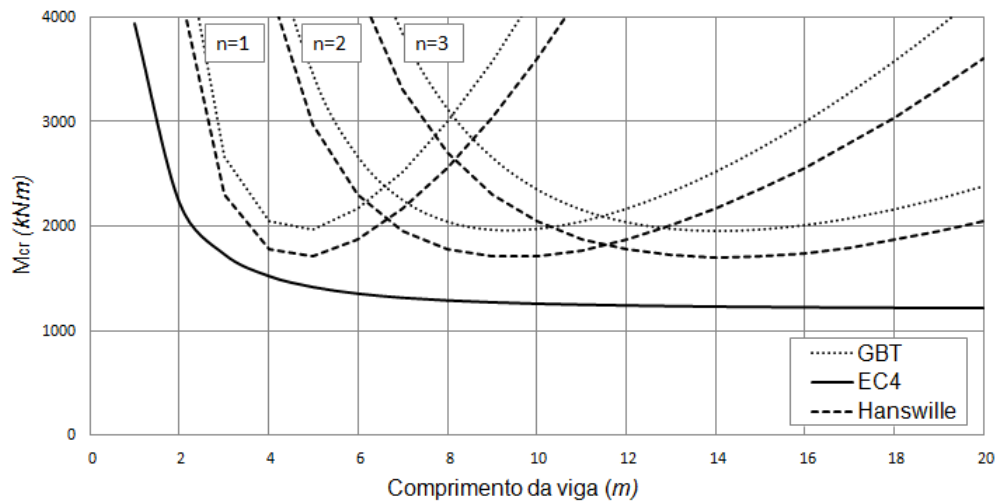


Figura 3.7: Gráfico comparativo dos vários métodos para uma viga simplesmente apoiada considerando uma rigidez menor para a laje

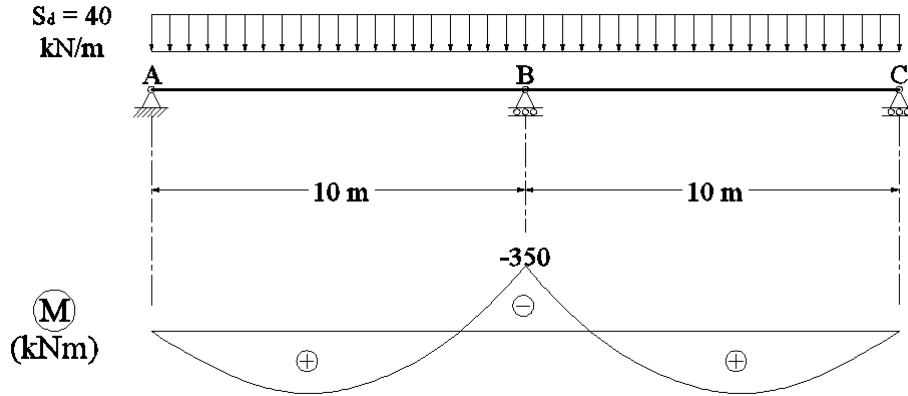


Figura 3.8: Viga mista contínua

larguras efectivas são então obtidos da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 L_e &= 0,85L = 8,5 \text{ m} \\
 b_0 &= 0,1 \text{ m} \\
 b_{ei} &= \frac{L_e}{8} = 1,063 \text{ m} \\
 b_{eff}^I &= b_0 + 2b_{ei} = 2,225 \text{ m} < a = 3,5 \text{ m},
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

para a zona de momentos positivos e

$$\begin{aligned}
 L_e &= 0,25(L + L) = 5,0 \text{ m} \\
 b_0 &= 0,1 \text{ m} \\
 b_{ei} &= \frac{L_e}{8} = 0,625 \text{ m} \\
 b_{eff}^{II} &= b_0 + 2b_{ei} = 1,350 \text{ m} < a = 3,5 \text{ m},
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

para a zona de momentos negativos.

3.3.2.1 Aplicação do método do EC4

Nesta secção ilustra-se a aplicação da metodologia do EC4 (ENV) para o cálculo do momento crítico elástico no apoio interno, metodologia essa apresentada no capítulo 2.2.

Cálculo de C_4

Para o cálculo de C_4 é necessário conhecer o valor de ψ , ou seja, a relação entre o momento no apoio interno, M_B , e o momento caso a viga mista fosse simplesmente apoiada, M_0 , ou seja,

$$\psi = \frac{M_B}{M_0}, \tag{3.52}$$

em que $M_0 = S_d L^2 / 8 = 500 \text{ kNm}$, ou seja, ψ assume o valor de 0,70. Recorrendo à tabela da figura 2.5 e interpolando valores, retira-se $C_4 = 32,46$.

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

Cálculo de I_{at}

I_{at} é a constante de torção de St. Venant da secção de aço estrutural. Esta pode ser obtida pela expressão (2.2)

$$I_{at} = \frac{1}{3} \sum_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3} (2b_f t_f^3 + h_w t_w^3) = 1,200 \times 10^{-6} \text{ m}^4. \quad (3.53)$$

Cálculo de I_{afz}

I_{afz} é o momento de inércia do banzo inferior da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia, dado pela expressão (2.6)

$$I_{afz} = \frac{b_f^3 t_f}{12} = 1,333 \times 10^{-5} \text{ m}^4. \quad (3.54)$$

Cálculo de k_1

k_1 representa a contribuição da laje para a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, equação (2.3). Tal como no caso anterior, considera-se que a laje encontra-se simplesmente apoiada em dois perfis, pelo que se tem $\alpha = 2,0$. O afastamento dos perfis é $a = 3,5$ m. Para o cálculo da inércia fendilhada da laje por unidade de largura na direcção transversal, I_2 , é necessário calcular a posição do eixo neutro elástico da laje, considerando que o betão não resiste à tracção e que esta passará pelo centro de gravidade da secção homogeneizada (ver figura 3.5), fornecendo

$$a_s (z_e - d_s) = \frac{1}{n} \frac{(h_c - z_e)^2}{2} \leftrightarrow z_e = 0,123 \text{ m}, \quad (3.55)$$

em que $n = E_a/E_c = 6,77$. A altura da laje de betão comprimida é dada por $d_c = h_c - z_e = 0,035$ m e a inércia fendilhada I_2 é obtida através de

$$I_2 = a_s (z_e - d_s)^2 + \frac{\left(\frac{1}{n} d_c^3\right)}{12} + \frac{1}{n} d_c \left(\frac{d_c}{2}\right)^2 = 3,572 \times 10^{-6} \text{ m}^4/\text{m}, \quad (3.56)$$

e tem-se finalmente

$$k_1 = \frac{\alpha E_a I_2}{a} = 428,64 \text{ kN/rad}. \quad (3.57)$$

Cálculo de k_2

k_2 representa a contribuição da laje para a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, expressão (2.4),

$$k_2 = \frac{E_a t_w^3}{4(1 - \nu_a^2) h_s} = 137,36 \text{ kN/rad}, \quad (3.58)$$

em que h_s é a distância entre os centros de corte dos banzos da secção de aço estrutural.

Cálculo de k_s

Para o cálculo do k_s utiliza-se a expressão (2.5). Este representa a rigidez transversal por unidade de comprimento da viga mista, que depende de k_1 e de k_2 , ou seja

$$k_s = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 104,03 \text{ kN/rad}. \quad (3.59)$$

Capítulo 3. Exemplos ilustrativos

Cálculo de k_c

k_c é calculado por (2.7) e (2.8), que têm em conta a secção de aço em I , bi-simétrica. Para tal é preciso calcular o momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de maior inércia

$$I_{ay} = \frac{t_w h_w^3}{12} + 2 \left[\frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] = 4,064 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.60)$$

o momento de inércia da secção de aço estrutural em relação ao eixo de menor inércia,

$$I_{az} = 2 \frac{t_f b_f^3}{12} + \frac{h_w t_w^3}{12} = 2,670 \times 10^{-5} \text{ m}^4, \quad (3.61)$$

a área da secção de aço estrutural,

$$A_a = h_w t_w + 2 b_f t_f = 0,012 \text{ m}^2 = 120 \text{ cm}^2, \quad (3.62)$$

a área da armadura longitudinal na largura efectiva do banzo de betão

$$A_s = a_s b_{eff}^I = 0,001526 \text{ m}^2 = 15,26 \text{ cm}^2, \quad (3.63)$$

a área da secção mista equivalente, desprezando o betão,

$$A = A_a + A_s = 0,013526 \text{ m}^2 = 135,26 \text{ cm}^2, \quad (3.64)$$

e a posição da linha neutra da secção mista fendilhada, tendo em conta a área equivalente, A ,

$$A_s (y_{ln} - d_s) + (2 b_f t_f + h_w t_w) \left(-\frac{h_w}{2} - t_f - h_c + y_{ln} \right) = 0 \leftrightarrow y_{ln} = 0,337 \text{ m}. \quad (3.65)$$

Pode-se agora calcular a inércia referente ao eixo de maior inércia da secção mista fendilhada I_y ,

$$I_y = I_{ay} + A_a \left(h_c + t_f + \frac{h_w}{2} - y_{ln} \right)^2 + A_s (y_{ln} - d_s)^2 = 5,242 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.66)$$

a distância entre o baricentro da secção de aço estrutural e a meia espessura da laje

$$z_c = \frac{h_s}{2} + \frac{t_f}{2} + \frac{h_c}{2} = 0,295 \text{ m}, \quad (3.67)$$

e por fim, substituindo nas expressões (2.8) e (2.7), obtém-se $e = 1,018 \text{ m}$, $i_x^2 = 0,036 \text{ m}^2$ e $k_c = 1,086$.

Cálculo do momento crítico elástico M_{cr}

O momento crítico pode agora ser obtido a partir da expressão 2.1, conduzindo a

$$M_{cr} = \frac{k_c C_4}{L} \sqrt{\left(G I_{at} + \frac{k_s L^2}{\pi^2} \right) E_a I_{afz}} = 6328,76 \text{ kNm}. \quad (3.68)$$

3.3.2.2 Aplicação do método de Hanswille

Nesta secção faz-se uma aplicação do método de Hanswille (2000), apresentado na secção 2.3 do capítulo 2, ao caso de estudo proposto.

Propriedades do perfil de aço estrutural

A área de aço estrutural do perfil é dada por

$$A_a = h_w t_w + 2 t_f b_f = 0,012 \text{ m}^2. \quad (3.69)$$

A inércia do perfil de aço estrutural segundo y é dada por

$$I_{ay} = \frac{t_w h_w^3}{12} + 2 \left[\frac{b_f t_f^3}{12} + b_f t_f \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right] = 4,064 \times 10^{-4} \text{ m}^4. \quad (3.70)$$

A inércia do perfil de aço estrutural segundo z é dada por

$$I_{az} = 2 \frac{t_f b_f^3}{12} + \frac{h_w t_w^3}{12} = 2,670 \times 10^{-5} \text{ m}^4. \quad (3.71)$$

A constante de torção de St. Venant do perfil de aço estrutural é dada por

$$I_T = \frac{1}{3} (2 b_f t_f^3 + h_w t_w^3) = 1,200 \times 10^{-6} \text{ m}^4. \quad (3.72)$$

A constante de empenamento da secção de aço estrutural, em relação ao centro de corte M, é dada por

$$I_{WM} = \frac{b_f^3 t_f}{24} h_s^2 = 1,176 \times 10^{-6} \text{ m}^6. \quad (3.73)$$

Propriedades da secção mista desprezando o betão

A área total de aço é dada pela seguinte expressão

$$A_{st} = A_a + A_s = 0,013526 \text{ m}^2 = 135,26 \text{ cm}^2, \quad (3.74)$$

em que $A_s = a_s b_{eff}^I = 0,001525 \text{ m}^2 = 15,25 \text{ cm}^2$. A distância entre a posição da armadura ordinária e o centro de massa do perfil metálico (recordar a figura 2.8), é dada por

$$a_{st} = \frac{h_w}{2} + t_f + \frac{h_c}{2} = 0,295 \text{ m}. \quad (3.75)$$

A inércia da secção mista segundo y , desprezando o betão, será

$$I_{st,y} = I_{ay} + \frac{A_a}{A_{st}} A_s a_{st}^2 = 5,242 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad (3.76)$$

A posição do baricentro da secção mista, desprezando o betão fendilhado, é dada por

$$z_{st} = a_{st} \frac{A_a}{A_{st}} = 0,262 \text{ m}. \quad (3.77)$$

$z_{st,a}$, é a distância entre os baricentros do perfil da secção mista desprezando o betão, ou seja, $z_{st,a} = z_{st} - a_{st} = 0,033 \text{ m}$.

Cálculo de k_z

O valor do factor k_z é dada pela expressão (2.14), ou seja

$$k_z = \left[\frac{(z_D + z_M)^2 + i_p^2}{z_e} + 2z_D \right] \frac{I_{ay}}{I_{st,y}} = -0,360 \text{ m}, \quad (3.78)$$

em que $z_D = -h_s/2 = -0,21 \text{ m}$, $z_M = 0$ (no caso dos perfis I), $i_p^2 = (I_{ay} + I_{az})/Aa = 0,0361 \text{ m}^2$ e $z_e = -I_{ay}/(z_{st,a}Aa) = -1,018 \text{ m}$.

Cálculo dos factores de comprimento η_B e β_B

Os factores de comprimento η_B e β_B são dados respectivamente pelas expressões (2.18) e (2.17). Para o primeiro tem-se

$$\eta_B = \sqrt{\frac{C_\phi L^4}{EI_{WD}}} = 45,878, \quad (3.79)$$

em que $I_{WD} = I_{WM} + z_D^2 I_{az} = 2,35 \times 10^{-6} \text{ m}^6$. $C_\phi = k_s = 104,03 \text{ kN/rad}$, calculado na secção 3.3.2.1.

O valor de β_B é determinado pelo ábaco (2.11), tendo em conta $A = 1,25$, $\psi = 0$ e $\sqrt{\eta_B}/\pi = 2,16$, retirando-se $\beta_B = 0,23$

Cálculo do momento crítico elástico

Para calcular o valor do momentos crítico da viga mista contínua em análise pelo método de Hanswille, é necessário determinar ainda a rigidez de torção de St. Venant efectiva, dada por $GI_{Teff} = A(1,5 - 0,5\psi)GI_T = 182,25 \text{ kNm}^2$.

Tendo em conta todos os valores obtidos, está-se em condições de aplicar a expressão (2.20), que fornece o valor do momento crítico elástico de acordo com o método de Hanswille, ou seja,

$$M_{cr} = \frac{1}{k_z} \left[\frac{\pi^2 EI_{WD}}{(\beta_B L)^2} + GI_{T,eff} \right] = -3065,82 \text{ kNm}, \quad (3.80)$$

3.3.2.3 Aplicação do método da GBT

Tendo em conta o problema apresentado na secção 3.3.2, definem-se os parâmetros geométricos a_1 (distância entre a linha média da secção de betão e a linha média do banzo superior do perfil de aço estrutural), a_2 (distância entre as linhas médias dos banzos do perfil de aço estrutural) e a (distância entre a linha média da secção de betão e a linha média do banzo inferior), tal como representado na figura 2.15. Estes parâmetros são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{h_c}{2} + \frac{t_f}{2} = 0,085 \text{ m}, \\ a_2 &= h_w + 2\frac{t_f}{2} = 0,42 \text{ m}, \\ a &= a_1 + a_2 = 0,505 \text{ m}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Os valores de b_1 e b_2 têm em conta as dimensões efectivas para as zonas de momentos flectores positivos e negativos. Para a zona de momentos positivos tem-se $b_1^I = b_2^I = b_{eff}^I/2 = 1,11 \text{ m}$ e para a zona de momentos negativos tem-se $b_1^{II} = b_2^{II} = b_{eff}^{II}/2 = 0,675 \text{ m}$.

Cálculo do modo de deformação

Neste caso, em que se tem uma viga mista contínua, é necessário determinar dois modos de deformação da secção mista, um para a zona de momentos flectores positivos (\bar{u}^I , \bar{v}^I e \bar{w}^I) e outro para a zona de momentos flectores negativos (\bar{u}^{II} , \bar{v}^{II} e \bar{w}^{II}). Para tal, é necessário calcular os deslocamentos e rotações dos nós da secção, com as expressões da tabela 2.1, para ambos os casos. Para momentos positivos obtém-se

$$\begin{aligned}\delta_C^I &= \frac{ab_2^2}{2D_{fc}^I} = 0,00008514 \text{ m}, \\ \delta_G^I &= \frac{a^2b_2}{D_{fc}^I} + \frac{a_2^3}{3D_{fw}^I} = 0,001333 \text{ m}, \\ \theta_B^I &= \frac{ab_2}{D_{fc}^I} = 0,0000973 \text{ rad}, \\ \theta_G^I &= \frac{ab_2}{D_{fc}^I} + \frac{a_2^2}{2D_{fw}^I} = 0,004684 \text{ rad},\end{aligned}\tag{3.82}$$

em que D_{fc}^I é a rigidez de flexão transversal da laje de betão, não fendilhada, dada por

$$D_{fc}^I = \frac{E_c h_c^3}{12(1 - \nu_a^2)} = 9082,03 \text{ kN/m}\tag{3.83}$$

e D_{fw} é a rigidez de flexão transversal da alma do perfil metálico, ou seja

$$D_{fw} = \frac{E_a t_w^2}{12(1 - \nu_a^2)} = 19,231 \text{ kN/m}.\tag{3.84}$$

Para momentos negativos tem-se antes

$$\begin{aligned}\delta_C^{II} &= \frac{ab_2^2}{2D_{fc}^{II}} = 0,0010302 \text{ m}, \\ \delta_G^{II} &= \frac{a^2b_2}{D_{fc}^{II}} + \frac{a_2^3}{3D_{fw}^{II}} = 0,0018788 \text{ m}, \\ \theta_B^{II} &= \frac{ab_2}{D_{fc}^{II}} = 0,0011774 \text{ rad}, \\ \theta_G^{II} &= \frac{ab_2}{D_{fc}^{II}} + \frac{a_2^2}{2D_{fw}^{II}} = 0,0057638 \text{ rad},\end{aligned}\tag{3.85}$$

e D_{fc}^{II} é a rigidez de flexão transversal da laje de betão fendilhada, considerando a inércia da laje fendilhada, tal como no método do EC4 (expressão 3.5), dada por

$$D_{fc}^{II} = E_a I_2 = 750,60 \text{ kN/m}.\tag{3.86}$$

Os parâmetros k_1^I , k_2^I , k_3^I , k_1^{II} , k_2^{II} e k_3^{II} , dados pelas expressões (2.36), assumem os seguintes valores

$$\begin{aligned}k_1^I &= -6,586 \times 10^{-4}, \quad k_2^I = -1,951 \times 10^{-3}, \quad k_3^I = 8,514 \times 10^{-5}, \\ k_1^{II} &= -8,422 \times 10^{-4}, \quad k_2^{II} = -2,227 \times 10^{-3}, \quad k_3^{II} = 1,030 \times 10^{-3}.\end{aligned}\tag{3.87}$$

Capítulo 3. Exemplos ilustrativos

Tendo em conta os valores anteriores, estamos em condições de escrever o modo de deformação segundo as expressões dadas em (2.35), ficando

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^I &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0, 1 - y \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{w}}^I &= \begin{pmatrix} 0, 07298070167y - 0, 1277162279 \\ -0, 02085162904y^2 + 0, 07298070167y \\ 0, 07298070167y - 0, 007298070168 \\ -6, 667464265y^3 + 8, 295505653y^2 + 0, 07298070167y \\ -0, 3512783361 + 3, 512783361y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.88)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{II} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0, 1 - y \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{v}}^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{w}}^{II} &= \begin{pmatrix} 0, 6266778840y - 1, 096686297 \\ -0, 1790508239y^2 + 0, 6266778840y \\ 0, 6266778840y - 0, 06266778840 \\ -6, 050899940y^3 + 6, 718222015y^2 + 0, 6266778840y \\ -0, 3067848130 + 3, 067848130y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Cálculo das constantes C_1^I , C_2^I , B^I , D_1^I , D_2^I , C_1^{II} , C_2^{II} , B^{II} , D_1^{II} e D_2^{II}

As constantes de rigidez da GBT são

- C_1 , que representa a contante de rigidez longitudinal dos termos de membrana, dada por (2.37)

$$C_1^I = C_1^{II} = E_a \frac{t_f b_f^3}{12} = 2800; \quad (3.90)$$

- C_2 , constante de rigidez longitudinal dos termos de flexão⁵, dada por (2.38)

$$\begin{aligned} C_2^I &= D_{fc}^{xx} \left[\frac{b_1^3 \theta_B^2}{3\delta_G^2} + \frac{k_3^2 b_2}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3 b_2^2}{2\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ &+ D_{fw} \left[\frac{k_1^2 h_w^7}{7\delta_G^2 a_2^6} - \frac{k_2 k_1 h_w^6}{3\delta_G^2 a_2^5} + \left(\frac{2\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{k_2^2}{a_2^4} \right) \frac{h_w^5}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_2 h_w^4}{2a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 h_w^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ &+ D_{ff} \left[\frac{b_f^3}{12} \left(\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right)^2 \right] = 123, 82, \end{aligned} \quad (3.91)$$

⁵A rigidez longitudinal dos termos de flexão, para efeitos de cálculo, pode ser desprezada quando se considera que a laje de betão está fendilhada.

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

em que $D_{ff} = \frac{E_a t_f^3}{12(1-\nu_a^2)} = 153,85 \text{ kNm}$, é a rigidez de flexão dos banzos, $D_{fw} = \frac{E_a t_w^3}{12(1-\nu_a^2)} = 19,231 \text{ kNm}$, é a rigidez da alma do perfil de aço estrutural e $D_{fc}^{xx} = \frac{E_c h_c^3}{12(1-\nu_c^2)} = 9082,03 \text{ kNm}$ é a rigidez de flexão longitudinal da laje de betão não fendilhada e

$$\begin{aligned} C_2^{II} = & D_{fc}^{xx} \left[\frac{b_1^3 \theta_B^2}{3\delta_G^2} + \frac{k_3^2 b_2}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3 b_2^2}{2\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ & + D_{fw} \left[\frac{k_1^2 h_w^7}{7\delta_G^2 a_2^6} - \frac{k_2 k_1 h_w^6}{3\delta_G^2 a_2^5} + \left(\frac{2\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{k_2^2}{a_2^4} \right) \frac{h_w^5}{5\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_2 h_w^4}{2a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 h_w^3}{3\delta_G^2} \right] + \\ & + D_{ff} \left[\frac{b_f^3}{12} \left(\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right)^2 \right] = 2,81, \end{aligned} \quad (3.92)$$

em que D_{ff} e D_{fw} , assumem os mesmos valores e $D_{fc}^{xx} \approx 0$, porque se assume que a laje betão se encontra totalmente fendilhada.

- B , é a constante de rigidez de flexão transversal, dada por (2.39)

$$B^I = D_{fc}^I \frac{4k_3^2}{b_2^3 \delta_G^2} + D_{fw} \left(\frac{12k_1^2 h_w^3}{a_2^6 \delta_G^2} - \frac{12k_2 k_1 h_w^2}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{4k_2^2 h_w}{a_2^4 \delta_G^2} \right) = 759,39, \quad (3.93)$$

em que D_{fc} , é a rigidez de flexão transversal, calculada em (3.83), considerando a inércia da laje não fendilhada e

$$B^{II} = D_{fc}^{II} \frac{4k_3^2}{b_2^3 \delta_G^2} + D_{fw} \left(\frac{12k_1^2 h_w^3}{a_2^6 \delta_G^2} - \frac{12k_2 k_1 h_w^2}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{4k_2^2 h_w}{a_2^4 \delta_G^2} \right) = 596,98, \quad (3.94)$$

em que D_{fc}^{II} , é a rigidez de flexão transversal, calculada em (3.86), considerando a inércia da laje fendilhada, tal como no método do EC4 (expressão 3.5);

- D_1 , é a constante de rigidez de torção, dada por (2.40)

$$\begin{aligned} D_1^I = & \frac{E_c h_c^3}{6} \left[\frac{b_1 \theta_B^2}{\delta_G^2} + \frac{4k_3^2}{3b_2 \delta_G^2} - \frac{2\theta_B k_3}{\delta_G^2} + \frac{\theta_B^2 b_2}{\delta_G^2} \right] + \\ & + G_a \frac{t_w^3 h_w}{3} \left[\frac{9k_1^2 h_w^4}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{3k_2 k_1 h_w^3}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^2}{3\delta_G^2} \left(\frac{6\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{4k_2^2}{a_2^4} \right) - \frac{2\theta_B k_2 h_w}{a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2}{\delta_G^2} \right] + \\ & + G_a \frac{t_f^3 b_f}{3} \left[\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right]^2 = 781,77, \end{aligned} \quad (3.95)$$

em que $G_a = \frac{E_a}{2(1+\nu_a)} = 80,769 \text{ GPa}$, é o módulo de distorção do aço estrutural e

$$\begin{aligned} D_1^{II} = & G_a \frac{t_w^3 h_w}{3} \left[\frac{9k_1^2 h_w^4}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{3k_2 k_1 h_w^3}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^2}{3\delta_G^2} \left(\frac{6\theta_B k_1}{a_2^3} + \frac{4k_2^2}{a_2^4} \right) - \frac{2\theta_B k_2 h_w}{a_2^2 \delta_G^2} + \frac{\theta_B^2}{\delta_G^2} \right] + \\ & + G_a \frac{t_f^3 b_f}{3} \left[\frac{\theta_B}{\delta_G} + \frac{3k_1}{a_2 \delta_G} - \frac{2k_2}{a_2 \delta_G} + \frac{\theta_B}{\delta_G} \right]^2 = 487,59, \end{aligned} \quad (3.96)$$

em que se desprezaram-se as parcelas que tem em conta a laje de betão, pois esta encontra-se fendilhado;

- D_2 , o termo de acoplamento ⁶, dado por (2.41)

$$D_2^I = \nu_{xx} D_{fc}^{xx} \left(\frac{2k_3^2}{3b_2\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3}{\delta_G^2} \right) + \nu_a D_{fw} \left[\frac{6k_1^2 h_w^5}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{2k_2 k_1 h_w^4}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^3}{3} \left(\frac{2k_2^2}{a_2^4 \delta_G^2} + \frac{6k_1 \theta_B}{a_2^3 \delta_G^2} \right) - \frac{\theta_B k_2 h_w^2}{a_2^2 \delta_G^2} \right] = -1,69, \quad (3.97)$$

e

$$D_2^{II} = \nu_{xx} D_{fc}^{xx} \left(\frac{2k_3^2}{3b_2\delta_G^2} - \frac{\theta_B k_3}{\delta_G^2} \right) + \nu_a D_{fw} \left[\frac{6k_1^2 h_w^5}{5a_2^6 \delta_G^2} - \frac{2k_2 k_1 h_w^4}{a_2^5 \delta_G^2} + \frac{h_w^3}{3} \left(\frac{2k_2^2}{a_2^4 \delta_G^2} + \frac{6k_1 \theta_B}{a_2^3 \delta_G^2} \right) - \frac{\theta_B k_2 h_w^2}{a_2^2 \delta_G^2} \right] = 2,78, \quad (3.98)$$

com D_{fc}^{xx} e D_{fw} , calculados atrás, tanto para o caso não fendilhado como para o caso fendilhado.

Cálculo das constantes X^I e X^{II}

Para o calculo das constantes X^I e X^{II} (2.33), é necessário calcular a distribuição das tensões longitudinais a actuar na viga, dadas por (2.42), para a zona de momentos flectores positivos e para a zona de momentos flectores negativos, o que implica o cálculo da inércia da secção transversal mista em relação à sua linha neutra, para ambas as zonas. As posições das linhas neutras em relação à face superior da laje, d_{sup}^I e d_{sup}^{II} , são dadas por,

$$\begin{aligned} & \frac{a_s E_s}{E_a} b_{eff}^I \left(d_{sup}^I - \frac{h_c}{2} \right) + h_c b_{eff}^I \frac{E_c}{E_a} \left(d_{sup}^I - \frac{h_c}{2} \right) + \\ & + (2b_f t_f + h_w t_w) \left(-\frac{h_w}{2} - t_f - h_c + d_{sup}^I \right) = 0 \\ \Rightarrow d_{sup}^I &= 0,113 \text{ m} \end{aligned} \quad (3.99)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{a_s E_s}{E_a} b_{eff}^{II} \left(d_{sup}^{II} - \frac{h_c}{2} \right) + (2b_f t_f + h_w t_w) \left(-\frac{h_w}{2} - f_f - h_c + d_{sup}^{II} \right) = 0 \\ \Rightarrow d_{sup}^{II} &= 0,337 \text{ m}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

respectivamente.

Tendo em conta a figura 2.18, as distâncias à linha neutra de cada parede, d^I e d^{II} , são dadas por (2.43), ou seja

$$d^I = \begin{pmatrix} 0,038 \\ 0,038 \\ -0,047 \\ -0,047 - y \\ -0,467 \end{pmatrix}. \quad (3.101)$$

⁶Este termo pode ser desprezado quando se considera que a laje de betão está fendilhada.

3.3. Exemplo 2: viga de Calado e Santos (2010)

e

$$d^{II} = \begin{Bmatrix} 0,262 \\ 0,262 \\ 0,177 \\ 0,177 - y \\ -0,243 \end{Bmatrix}. \quad (3.102)$$

Assim sendo, as inércias das secções mistas em relação às respectivas linhas neutras, I^I e I^{II} , obtêm-se através de

$$I^I = \sum_{j=1}^5 \left[\frac{E_j}{E_a} t_j \int d^2 dy \right] = 12,484 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (3.103)$$

e

$$I^{II} = \sum_{j=1}^5 \left[\frac{E_j}{E_a} t_j \int d^2 dy \right] = 5,217 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (3.104)$$

em que E_j e t_j são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a espessura da parede j .

Tendo estes valores calculados está-se em condições de calcular o valor da constante geométrica X , dada por (2.33), ou seja

$$\begin{aligned} X^I &= \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \sigma_{xx}^M t (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) dy \right] = \\ &= \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \left(\frac{M d^I}{I^I} \right) t_j (\bar{v}_j^I \bar{v}_j^I + \bar{w}_j^I \bar{w}_j^I) dy \right] = \\ &= -288,943x + 35,023x^2, \end{aligned} \quad (3.105)$$

e

$$\begin{aligned} X^{II} &= \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \sigma_{xx}^M t (\bar{v}^2 + \bar{w}^2) dy \right] = \\ &= \sum_{j=1}^5 \left[\int_{\bar{S}} \left(\frac{M d^{II}}{I^{II}} \right) t_j (\bar{v}_j^{II} \bar{v}_j^{II} + \bar{w}_j^{II} \bar{w}_j^{II}) dy \right] = \\ &= -305,234x + 36,998x^2, \end{aligned} \quad (3.106)$$

em que $M = 165x - 20x^2$.

Cálculo do momento crítico, M_{cr}

Para o caso da viga contínua em estudo, conforme foi discutido na secção 2.4.3.4, a função de amplitude modal ϕ é aproximada por funções do $\psi_n = \sin(k_n x) - k_n x \cos(k_n L)$, em que k_n é uma constante que depende do número de ondas da função, calculada a partir da equação $k_n L - \tan(k_n L) = 0$, sendo L o vão da viga mista.

Para saber o valor do momento crítico é necessário resolver o problema de valores e vectores próprios (2.52) como foi referido na secção 2.4.3.4, com

$$\mathbf{G} = \int_0^{10} X \psi_{,x}^t \psi_{,x} dx = \int_0^{33/4} X^I \psi_{,x}^t \psi_{,x} dx + \int_{33/4}^{10} X^{II} \psi_{,x}^t \psi_{,x} dx \quad (3.107)$$

e

$$\begin{aligned}
 K &= \int_0^{10} \left[(C_1 + C_2) \psi_{,xx}^t \psi_{,xx} + D_1 \psi_{,x}^t \psi_{,x} + B \psi_x^t \psi_x + D_2 (\psi_x^t \psi_{,xx} + \psi_{,xx}^t \psi_x) \right] dx = \\
 &= \int_0^{33/4} \left[(C_1^I + C_2^I) \psi_{,xx}^t \psi_{,xx} + D_1^I \psi_{,x}^t \psi_{,x} + B^I \psi_x^t \psi_x + D_2^I (\psi_x^t \psi_{,xx} + \psi_{,xx}^t \psi_x) \right] dx + \\
 &\quad + \int_{33/4}^{10} \left[(C_1^{II} + C_2^{II}) \psi_{,xx}^t \psi_{,xx} + D_1^{II} \psi_{,x}^t \psi_{,x} + B^{II} \psi_x^t \psi_x + D_2^{II} (\psi_x^t \psi_{,xx} + \psi_{,xx}^t \psi_x) \right] dx,
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

em que neste exemplo foram consideradas 6 funções de aproximação e portanto a matriz das funções de aproximação ψ é dada por

$$\psi^t = \begin{bmatrix} \text{sen}(k_1 x) - k_1 x \cos(k_1 10), \\ \text{sen}(k_2 x) - k_2 x \cos(k_2 10) \\ \text{sen}(k_3 x) - k_3 x \cos(k_3 10) \\ \text{sen}(k_4 x) - k_4 x \cos(k_4 10) \\ \text{sen}(k_5 x) - k_5 x \cos(k_5 10) \\ \text{sen}(k_6 x) - k_6 x \cos(k_6 10) \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

com $k_1 = 0,4493$, $k_2 = 0,7725$, $k_3 = 1,0904$, $k_4 = 1,4066$, $k_5 = 2,0371$ e $k_6 = 2,3519$.

Resolvendo (2.52) obtêm-se os valores próprios

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 9,708482163 & \lambda_2 &= 11,02545790 & \lambda_3 &= 21,53700554 \\
 \lambda_4 &= 52,42706932 & \lambda_5 &= 71,53407609 & \lambda_6 &= -637,3833820
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

ou seja, o momento crítico no apoio de continuidade determinado pelo método proposto, baseado na GBT, será

$$M_{cr} = \lambda_1 M_B = 9,7084 \times (-350) = -3397,97 \text{ kNm}. \tag{3.111}$$

Os vectores próprios são dados por

$$\begin{aligned}
 \Delta d_1 &= \begin{bmatrix} -0,5289555128 \\ -1 \\ 0,01458194046 \\ 0,2204116033 \\ -0,01003957562 \\ 0,001812953871 \end{bmatrix} & \Delta d_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -0,3479750918 \\ -0,8167246472 \\ -0,08698019884 \\ 0,02165199420 \\ 0,007319490325 \end{bmatrix} & \Delta d_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0,3975844513 \\ 0,001877088618 \\ 0,4200216347 \\ -0,1827895908 \\ -0,04739631070 \end{bmatrix} \\
 \Delta d_4 &= \begin{bmatrix} -1 \\ -0,2640470727 \\ -0,2087804299 \\ -0,3534069034 \\ -0,2126677250 \\ -0,2763907833 \end{bmatrix} & \Delta d_5 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0,2002301692 \\ -0,3382017433 \\ -0,001583939762 \\ -0,1651538790 \\ 0,1380317962 \end{bmatrix} & \Delta d_6 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -0,7121789473 \\ 0,6503600676 \\ -0,5804165990 \\ -0,3046183742 \\ 0,1477822398 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Obtêm-se assim os modos de instabilidade que se encontram representados no gráfico da figura 3.9. Note-se que o modo crítico corresponde ao primeiro modo de deformação, visto ser o modo correspondente ao menor valor próprio (λ). A título informativo, mostra-se na figura 3.10 e na tabela 3.6 a variação do parâmetro de carga crítica (λ_{cr}) à medida que o número de funções de aproximação (n) aumenta, concluindo que o valor de λ_{cr} apresenta boa precisão com apenas 4 funções de aproximação.

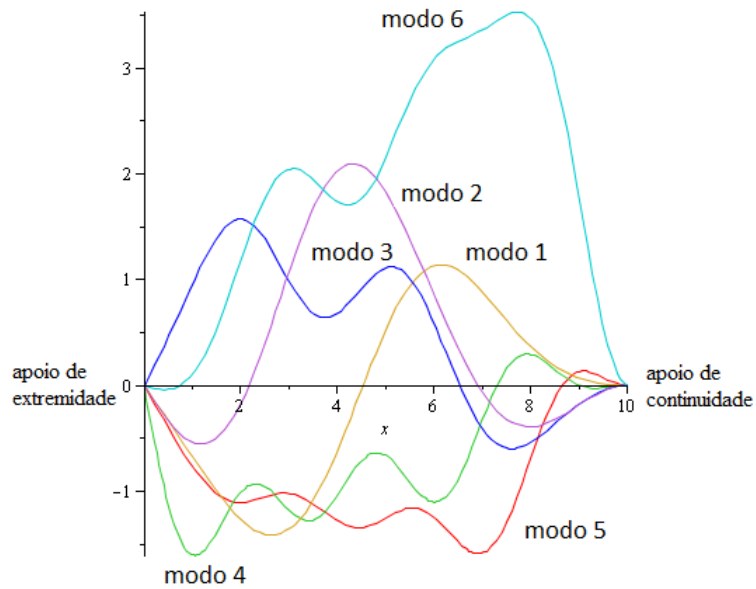


Figura 3.9: Amplitude dos modos de instabilidade da viga contínua da figura 2.22

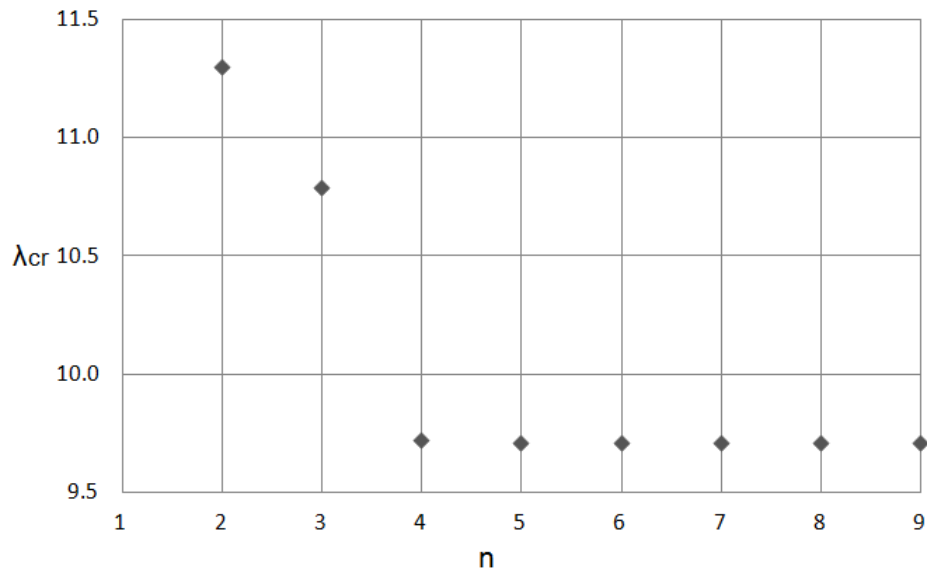


Figura 3.10: Valores de λ_{cr} para diferentes números de funções de aproximação n

Tabela 3.6: Valores de λ_{cr} para diferentes números de funções de aproximação n

n	λ_{cr}
1	28.74232
2	11.29637
3	10.78616
4	9.721972
5	9.709251
6	9.708482
7	9.708027
8	9.707868
8	9.707781

3.3.2.4 Discussão e comparação dos resultados

Neste caso os valores das rigidezes são os mesmos que os do Caso 1, pelo que as conclusões são idênticas às apresentadas na secção 3.3.1.4.

No que se refere ao valor do momento crítico, regista-se agora que o método que apresenta o menor valor é agora o de Hanswille, sendo o método do EC4 aquele que fornece o valor mais elevado. Este valores apresentam um erro de 51.56% entre o método do EC4 e GBT e de 9.77% entre o método de Hanswille e GBT.

Capítulo 4

Conclusões e desenvolvimentos futuros

4.1 Conclusões

A principal contribuição do trabalho apresentado nesta dissertação incide no estudo do fenómeno da encurvadura distorcional em vigas mistas, sendo avaliados os momentos críticos elásticos (M_{cr}) de encurvadura lateral através das metodologias apresentadas no EC4 (ENV), por Hanswille e a metodologia desenvolvida na presente dissertação, baseada nos fundamentos da GBT. As metodologias estudadas são confrontadas com a metodologia desenvolvida segundo a GBT, apontando-se as suas diferenças, inconsistências e semelhanças. Desta forma, os estudos efectuados neste trabalho permitem retirar as conclusões que se apresentam sumarizadas neste capítulo.

Inicialmente foi apresentada uma revisão bibliográfica (Capítulo 1) com diversos estudos sobre este tema. Esta revisão fornece uma perspectiva sobre os trabalhos desenvolvidos até à data, extraíndo-se daí a conclusão de que existe uma forte necessidade de se desenvolverem métodos gerais, que permitam modelar este fenómeno de uma forma mais precisa.

Nesta dissertação foram então estudados vários modelos analíticos para o cálculo de M_{cr} , baseados no modelo de estrutura em “U” invertido (figura 2.1). O método do EC4 (ENV) admite que o perfil de aço estrutural roda como um corpo rígido, considerando portanto a constante de torção de St. Venant. A rigidez de flexão transversal é fornecida pela laje de betão e pela alma do perfil metálico, considerando uma rotação unitária ao nível do banzo superior do perfil metálico. A rigidez de empenamento do banzo inferior é contabilizada admitindo um deslocamento lateral unitário do banzo inferior, entrando em contradição com a consideração feita para a rigidez de flexão transversal. A expressão fornecida pelo EC4, à partida é conceptualmente incorrecta, pois não corresponde ao comportamento tipo “placa”.

À semelhança do método do EC4, o método apresentado por Hanswille considera a constante de torção de St. Venant e a rigidez de flexão transversal. Contudo o método de Hanswille é mais consistente que o do EC4 (ENV), pois a constante de empenamento é calculada considerando uma rotação unitária ao nível do banzo superior. Além disto, o andamento do M_{cr} fornecido pelo método de Hanswille apresenta um comportamento tipo “placa”.

O método desenvolvido segundo os fundamentos da GBT admite um modo de deformação da secção transversal, tendo em conta as hipóteses simplificativas da GBT, que simula o modo de distorção da secção. Neste caso todas as constantes de rigidez são calculadas de acordo com o modo definido (no presente trabalho o modo foi escalado para um deslocamento lateral unitário do banzo inferior). A constante de torção de St. Venant fornece valores mais precisos que os restantes métodos, pois tem em conta, de uma forma consistente, a distorção da secção.

Em relação à rigidez de flexão transversal, há que referir que a GBT tem em conta a rigidez da laje de betão e da alma do perfil metálico, tal como os restantes métodos, mas no caso da GBT tem-se ainda em conta a rigidez do troço “rígido” entre a linha média do banzo superior e da laje de betão. Em relação à rigidez de empenamento, esta é igual à rigidez do método do EC4. Em relação ao método de Hanswille será igual tendo em conta o factor de escala do modo.

Fez-se uma validação do método desenvolvido e uma comparação qualitativa com os restantes métodos com o objectivo de confirmar as semelhanças e diferenças entre eles. A validação foi feita em duas fases: (i) primeiro confirmou-se o modo de deformação da secção transversal com o SAP2000, verificando-se diferenças muito pequenas, desprezáveis; (ii) de seguida validou-se os valores de M_{cr} obtidos pela GBT (presente trabalho), com os valores obtidos por Gonçalves e Camotim (2010), concluindo-se que se obtêm bons resultados.

A comparação qualitativa fez-se para dois casos de estudo, concluindo-se que:

1. viga mista simplesmente apoiada

- Em relação à rigidez de empenamento, existe uma coincidência quase perfeita, devendo-se a pequena diferença registada no método de Hanswille a erros de arredondamentos (desprezáveis).
- Em relação à rigidez de flexão transversal, a diferença registada deve-se ao troço rígido ser desprezado nos métodos do EC4 e Hanswille.
- A diferença verificada na rigidez de torção deve-se, como já era de esperar, ao facto de nos métodos do EC4 e Hanswille se considerar que o perfil de aço estrutural roda como um corpo rígido, enquanto que no método da GBT a rigidez de torção é calculada consistentemente, tendo em conta a distorção da secção transversal.
- A constante X e o factor k_z do método de Hanswille não são iguais, razão para o M_{cr} do método de Hanswille apresentar valores inferiores ao M_{cr} do método da GBT.

Foi apresentado um gráfico comparativo dos valores de M_{cr} de cada método em função do vão (L) (figura 3.6), concluindo-se que o método do EC4 apresenta valores bastante reduzidos e que o método de Hanswille conduz a valores muito próximos da GBT, registando-se os valores mínimos para os mesmos valores de L em ambos os métodos.

2. viga mista contínua

- As conclusões para os valores das rigidezes são idênticas ao caso da viga mista simplesmente apoiada, visto apresentarem os mesmos valores por se referirem à mesma secção transversal.
- Neste caso registou-se que o valor de M_{cr} fornecido pelo método do EC4 é superior aos obtidos pelos restantes métodos, concluindo-se que o método do EC4 apresenta valores muito elevados para o caso de vigas contínuas.

É assim fortalecida a ideia, atrás referida, que o método do EC4 é conceptualmente incorrecto.

4.2 Desenvolvimentos futuros

Para desenvolvimentos futuros propõe-se em primeiro lugar o desenvolvimento de um programa de cálculo automático para determinar momentos críticos e respectivos modos de instabilidade de vigas mistas contínuas baseado no modelo proposto nesta Dissertação. Tal ferramenta permitiria estudar a influência dos vários parâmetros intervenientes e elaborar ábacos auxiliares de cálculo.

Os resultados obtidos nos exemplos apresentados no Capítulo 3 mostram que os diversos métodos podem conduzir a momentos críticos significativamente diferentes. Muito embora o método proposto esteja conceptualmente correcto, seria importante investigar a sua precisão. Para isso, será necessário recorrer a comparações com resultados obtidos através de modelos com elementos finitos de casca.

Bibliografia

- Bradford, M. A., 1998. Inelastic buckling of I-beam with continuous elastic tension flange restraint. *Journal of Constructional Steel Research*, 48:63-77.
- Bradford, M. A. e Gao, Z., 1992. Distortional Buckling Solutions for Continuous Composite Beams. *Journal of Structural Engineering*, vol.118:1144.
- Bradford, M. A. e Kemp, A. R., 2000. Buckling in Continuous Composite Beams. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2:169:178.
- Calado, L. e Santos, J., 2010. *Estruturas Mistas de Aço e Betão*. IST Press, Lisboa.
- Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R. e Dinis, P. B., 2006. GBT-based Structural Analysis of Thin-walled Members: Overview, Recent Progress and Future Developments. *Advances in Engineering Structures, Mechanics of Constriction*. 187-204.
- Camotim, D., Basaglia, C., Bebiano, R., Gonçalves, R., Silvestre, N., 2010. *Latest Developments in the GBT Analysis of Thin-walled Steel Structures*, Keynote Lecture, Proceedings of SDSS 2010 International Colloquium on Stability and Ductility of Steel Structures, E. Batista, P. Vellasco, L. de Lima (eds.), Rio de Janeiro, Brazil. pp. 33-58 (Volume 1).
- Camotim, D., Basaglia, C. and Silvestre, N., 2010. GBT Buckling Analysis of Thin-walled Steel Frames: A State-of-art Report. *Thin-Walled Structures*, 48:726-743.
- CEN, 2004. *EN 1992-1-1 Eurocode 2: Design of Concrete Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européen de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2004. *EN 1993-1-1 Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européen de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2000. *ENV 1994-1-1 Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européen de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- CEN, 2004. *EN 1994-1-1 Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures, Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings*. Comité Européen de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- Collin, P., Möller, M., Johansson, B., 1998. Lateral-Torsional Buckling of Continuous Bridge Girders. *Journal of Constructional Steel Research*, 45:217-235.
- Davies, J. M. (1998). Generalised Beam Theory (GBT) for Coupled Instability Problems. *Coupled Instabilities in Metal Structures: Theoretical and Design Aspects*. J. Rondal (Ed.) CISM Course n°379. Springer-Verlag, Wien, Part IV, 151-223.

Bibliografia

- Gonçalves, M. R., 2007. *Análise de Vigas de Parede Fina com Secção Deformável: Novas Formulações e Aplicações*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa, Fevereiro de 2007.
- Gonçalves, R., Camotim, D., 2007. Thin-walled Member Plastic Bifurcation Analysis Using Generalized Beam Theory. *Advances in Engineering Software*, 38:637-646.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2010. Steel-concrete Composite Bridge Analysis Using Generalised Beam Theory. *Steel and Composite Structures*, 10:223-243.
- Gonçalves, R., Le Grogne, F. e Camotim, D., 2010. GBT-based Semi-analytical Solutions for the Plastic Bifurcation of Thin-walled Members. *International Journal of Solids and Structures*. 47:34-50.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. e Camotim, D., 2010. A New Approach to the Calculation of Cross-section Deformation Modes in the Framework of Generalized Beam Theory. *Computational Mechanics*, 46(5):759-781.
- Gonçalves, R., 2011. Lajes e Cascas. *FCT-UNL*.
- Hanswille, G., 2000. Lateral Torsional buckling of Composite Beams: A New Method for the Determination of the Critical Bending Moment and Comparison With Eurocode 4-1. *Institute of Steel and Composite Structures*, Wuppertal, Germany.
- Johnson, R. P., 2004. *Composite Structures of Steel and Concrete: Beams, slabs, columns, and frames for buildings*. 3rd Edition, Blackwell Scientific Publications.
- Johnson, R. P. e Anderson, D., 2004. *Designer's Guide to En 1994-1-1, Eurocode 4: Design of Composite Steel and Concrete Structures - Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings*. Thomas Telford, Inglaterra.
- Kemp, A. R., Trincherro, P., 1995. Factors Influencing the Strength of Continuous Composite Beams in Negative Bending. *Journal of Constructional Steel Research*, 34:161-185.
- Maple Inc., 2009. *Maple User Manual*. Waterloo, Canada.
- Reis, A. J., e Camotim, D., 2001. *Estabilidade Estrutural*. McGraw-Hill de Portugal, Lisboa, Portugal.
- Salah, W. e Gizejowski, M. A., 2008. Restraint Distortional Buckling of Composite Beams: FE Modelling of the Behavior of Steel-Concrete Beams in the Hogging Moment Region. *Eurosteel*, Austria, 1629:1634.
- SAP2000 Inc., 2009. *Integrated Solution for Structural Analyses and Design: Static and Dynamic Finite Element Analyses of Structures 14.0.0*. Computer and Structures, Berkeley Califórnia, USA.
- Schardt, R., 1966. *Eine Erweiterung der Technischen Biegetheorie zur Berechnung Prismatischer Faltwerke*. Der Stahlbau. 35:161-171.
- Schardt, R., 1989. *Verallgemeinerte Technische Biegetheorie*, Springer-Verlag, Berlim.
- SSEDTA, 2001. *Structural Steelwork Eurocodes - Development of a Trans-National Approach: Course on Eurocode 4*, Comunidade Europeia - Programa Leonardo da Vinci.
- Vrcelj, Z. e Bradford, M. A., 2006. Elastic Distortional Buckling of Continuous Restrained I-section Beam-columns. *Journal of Constructional Steel Research*. 62:223-230.

- Vrcelj, Z. e Bradford, M. A., 2007. Elastic Bubble Augmented Spline Finite Stripe Method in Analysis of Continuous Composite Beams. *Australian Journal of Structural Engineering*. 7(2):75-84.
- Vrcelj, Z. e Bradford, M. A., 2009. Inelastic Restrained Distortional Buckling of Continuous Composite T-beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 65:850-859.

